

Esercizi

①

1) Quante strette di mano possono darsi 100 persone?

Ricordando la formula $S = \frac{n \cdot (n-1)}{2}$, dove s è il numero di strette di mano ed n il numero di persone, basta sostituire ad n il valore 100:

$$S = \frac{100 \cdot (100-1)}{2} = \frac{100 \cdot 99}{2} = 4950$$

Altrimenti, disponendo in cerchio le 100 persone, si ha:

$$S = 100 + \frac{100 \cdot (100-3)}{2} = 100 + 50 \cdot 97 = 4950$$

Strette di mano con i vicini sul cerchio

→ Ogni persona stringe la mano a $n-3$ persone (non si conta la persona e i 2 vicini, già contati in precedenza).

Occorre dividere per due perché nel modo descritto ogni coppia viene contata due volte.

2) Calcola la somma dei numeri naturali compresi tra 1 e 300 (cioè $1+2+\dots+300$)

Dalla formula: $S = \frac{n(n+1)}{2} = \frac{300(301)}{2} = 45150$

②

3) Qual è il criterio di divisibilità per 11?

Un numero è divisibile per 11 se la somma delle sue cifre dispari (a partire dall'unità) meno la somma delle sue cifre pari è divisibile per 11.

4) Il numero 50336 è divisibile per 11?

È divisibile per 11 perché lo è la quantità $6 - 3 + 3 - 0 + 5 = 11$.

5) A quale numero è congruente, modulo 5, il numero 37?

Dividendo 37 per 5 si ha resto 2, quindi $37 \equiv 2 \pmod{5}$.

6) A quale numero è congruente, modulo 7, il numero 571?

Invece di dividere 571 per 7 si può scrivere il numero nella forma:

$$571 = 5 \cdot 100 + 7 \cdot 10 + 1 \cdot 1 \quad e,$$

dopo avere studiato le congruenze

modulo 7 delle potenze di 10, si

(3)

ottiene il risultato cercato utilizzando le proprietà delle congruenze:

$$1 \equiv 1 \pmod{7}$$

$$10 \equiv 3$$

$$100 = 10 \cdot 10 \equiv 3 \cdot 3 = 9 \equiv 2, \text{ quindi}$$

$$571 = 5 \cdot 100 + 7 \cdot 10 + 1 \cdot 1 \equiv 5 \cdot 2 + 0 \cdot 3 + 1 \cdot 1 = 11 \equiv 4$$

Il numero 571 è congruente a 4.

(Infatti
$$\begin{array}{r} 571 \quad | \quad 7 \\ \underline{4 \quad 81} \end{array}$$
)

7) Spiega la regola di divisibilità per 11 utilizzando le congruenze.

Le potenze di 10 sono congruenti (modulo 11) a:

$$1 \equiv 1$$

$$10 \equiv -1$$

$$100 = 10 \cdot 10 \equiv -1 \cdot (-1) = 1$$

$$1000 = 100 \cdot 10 \equiv 1 \cdot (-1) = -1$$

...

Quindi le cifre del numero che si vuole studiare devono essere moltiplicate,

a partire dalla cifra delle unità, 4
per i numeri: $1, -1, 1, -1, \dots$

8) Trova la regola di divisibilità per 6.

Le congruenze modulo 6 delle potenze di

10 sono:

$$1 \equiv 1$$

$$10 \equiv 4 \equiv -2$$

$$100 = 10 \cdot 10 \equiv -2 \cdot (-2) = 4 \equiv -2$$

Si sottraggono alla cifra delle unità
le altre cifre raddoppiate.

Se il risultato è congruente a zero
allora il numero è divisibile per 6.

Esempio

Il numero 738 è divisibile per 6
perché

$$1 \cdot 8 - 2 \cdot 3 - 2 \cdot 7 = 8 - 6 - 14 = -12 \equiv 0 \pmod{6}$$