I criteri di divisibilità e le congruenze

Il concetto di congruenza è dovuto a Gauss e risale circa al 1798.

Definizione

Due numeri si dicono congruenti modulo n se, nella divisione per n, danno lo stesso resto.

Per esempio i numeri 1, 4, 7, 10 sono congruenti modulo 3 perchè divisi per 3 danno tutti resto 1, si scrive per es. $4 \equiv 7 \mod 3$.

Raggruppando i numeri congruenti si ottengono le classi resto.

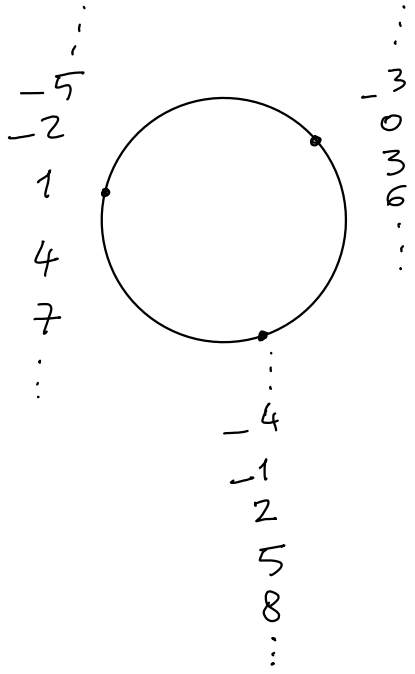
Nel caso della divisione per 3 si ottengono 3 classi resto che contengono tutti i numeri interi:

$$[0]_{\mod 3} = \{\dots, -6, -3, 0, 3, 6, 9, \dots\}$$

$$[1]_{\mod 3} = \{\dots, -5, -2, 1, 4, 7, 10, \dots\}$$

$$[2]_{\text{mod } 3} = \{\dots, -4, -1, 2, 5, 8, 11, \dots\}$$

Una rappresentazione geometrica dei numeri interi modulo 3 è la seguente:



I numeri congruenti a zero modulo 3 sono tutti e soli quelli divisibili per 3.

La relazione di congruenza è una relazione di equivalenza.

Le relazioni di equivalenza su un insieme A sono quelle per le quali valgono le proprietà:

1) riflessiva : $\forall a \in A \Rightarrow a R a$

quantificatore universale (per ogni) — simbolo di appartenenza — implica

(ogni elemento di A è in relazione con se stesso)

2) simmetrica : $a R b \Leftrightarrow b R a$

3) transitiva : $a R b$ e $b R c \Rightarrow a R c$

Un esempio di relazione di equivalenza è l'uguaglianza.

Gli insiemi di elementi in relazione tra loro sono chiamati classi di equivalenza.

La congruenza è una relazione di equivalenza, infatti ogni numero è congruente a se stesso, inoltre la congruenza è simmetrica e transitiva

(esempio se $4 \equiv 7 \pmod 3$ e $7 \equiv 10 \pmod 3 \Rightarrow 4 \equiv 10 \pmod 3$)

Le classi di equivalenza della congruenza sono le classi resto.

Le classi di equivalenza sono insiemi disgiunti (separati) e ricoprono l'insieme dei numeri interi.

Nel linguaggio matematico si dice che le classi di equivalenza costituiscono una partizione dell'insieme.

Proprietà delle congruenze

Per le congruenze valgono alcune proprietà che valgono anche per le uguaglianze.

Se $a \equiv a'$ e $b \equiv b' \pmod{n}$, si ha:

1) $a + b \equiv a' + b'$

2) $a - b \equiv a' - b'$

3) $ab \equiv a'b'$

Infatti se $a \equiv a' \pmod{n}$ significa che $a = a' + n \cdot t$, cioè che a ed a'

differiscono per un multiplo del divisore.

Allora se $a' \equiv a$ e $b' \equiv b \pmod{n}$

significa che

$$a' = a + t \cdot n \quad \text{e} \quad b' = b + s \cdot n,$$

dove t ed s sono numeri interi.

Se si eseguono per esempio le somme si ottiene:

$$a' + b' = a + tn + b + sn =$$
$$= a + b + (t + s)n$$

Si vede che anche $a' + b' \equiv a + b$ perché differiscono per un multiplo del divisore n.

In modo simile si dimostra che se $a \equiv a'$ e $b \equiv b' \pmod{n}$ allora

$a - b \equiv a' - b' \pmod{n}$ e

$a \cdot b \equiv a' \cdot b' \pmod{n}$.

Esempio

$7 \equiv 1$ e $5 \equiv 2 \mod 3$

allora

1) $7+5 \equiv 1+2 = 3 \equiv 0 \mod 3$

(infatti $7+5 = 12 \equiv 0$)

2) $7-5 \equiv 1-2 = -1 \equiv 2 \mod 3$

(infatti $7-5 = 2 \equiv 2$)

3) $7 \cdot 5 \equiv 1 \cdot 2 = 2 \equiv 2 \mod 3$

(infatti $7 \cdot 5 = 35 \equiv 2$)

Congruenze e divisibilità

Un numero è divisibile per n se è congruente a zero modulo n.

Ogni numero, nel sistema decimale, può essere scritto come somma dei prodotti delle sue cifre per le successive potenze di 10.

Esempio

$253 = 2 \cdot 100 + 5 \cdot 10 + 3 \cdot 1$

Se siamo interessati, per esempio, alla divisibilità per 3, è utile studiare la congruenza delle potenze di 10 modulo 3:

$1 \equiv 1$

$10 \equiv 1$

$100 = 10 \cdot 10 \equiv 1 \cdot 1 = 1$

- - - - -

Come si vede tutte le potenze di 10 sono congruenti a 1.

Di conseguenza:

$$253 = 2 \cdot 100 + 5 \cdot 10 + 3 \cdot 1 \equiv$$

$$\equiv 2 \cdot 1 + 5 \cdot 1 + 3 \cdot 1 = 2 + 5 + 3 = 10 \equiv 1$$

non è divisibile per 3 perché non è congruente a 0 (dà resto 1), mentre 252 è divisibile per 3.

La divisibilità per 3 si ha quindi se e solo se la somma delle cifre del numero è divisibile per 3.

Questo metodo si può applicare al problema della divisibilità per qualunque numero.

Esempi

1) Divisibilità per 2

Le congruenze modulo 2 delle potenze di 10 sono:

$$1 \equiv 1 \quad , \quad 10 \equiv 0 \quad , \quad 100 = 10 \cdot 10 \equiv 0 \cdot 0 = 0$$

$$1000 = 100 \cdot 10 \equiv 0 \cdot 0 = 0 \quad , \quad \dots$$

Tutte le potenze di 10 sono congruenti a zero. Solo l'unità è congruente a 1, quindi un numero qualsiasi, come 1234, risulta divisibile per 2 se la cifra delle unità lo è.

Per esempio 1234 è divisibile per 2, infatti

$$1234 = 1 \cdot 1000 + 2 \cdot 100 + 3 \cdot 10 + 4 \cdot 1 \equiv$$

$$\equiv 1 \cdot 0 + 2 \cdot 0 + 3 \cdot 0 + 4 \cdot 1 = 4 \equiv 0 \pmod 2$$

3) Divisibilità per 7

Le congruenze delle potenze di 10 modulo 7 sono:

$$1 \equiv 1$$
$$10 \equiv 3 \qquad \pmod 7$$

$$100 = 10 \cdot 10 \equiv 3 \cdot 3 = 9 \equiv 2$$

$$1000 = 100 \cdot 10 \equiv 2 \cdot 3 = 6 \equiv -1$$

$$10000 = 1000 \cdot 10 \equiv -1 \cdot 3 = -3$$

$$100000 = 10000 \cdot 10 \equiv -3 \cdot 3 = -9 \equiv -2$$

$$1000000 = 100000 \cdot 10 \equiv -2 \cdot 3 = -6 \equiv 1$$

- - -

Un numero è quindi divisibile per 7 se la somma delle sue cifre, a partire dalle unità, moltiplicate per la sequenza di numeri $1, 3, 2, -1, -3, -2, \ldots$ dà un numero divisibile per 7 (cioè congruente a zero modulo 7).

Per esempio il numero

$$1234 = 1 \cdot 1000 + 2 \cdot 100 + 3 \cdot 10 + 4 \cdot 1 \equiv$$

$$= 1 \cdot 1 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 2 + 4 \cdot -1 =$$

$$= 1 + 6 + 6 - 4 = 9 \equiv 2$$

non è divisibile per 7 (il resto è 2), mentre lo è il numero $1232 \equiv 0$.

4) Divisibilità per 11

Anche in questo caso si parte dalle congruenze delle potenze di 10 (mod 11):

$1 \equiv 1$

$10 \equiv -1$

$100 = 10 \cdot 10 \equiv 1$

$1000 = 100 \cdot 10 \equiv -1$

- - -

In questo caso si ha il noto criterio di divisibilità:

un numero è divisibile per 11 se e solo se la somma delle sue cifre, a partire dalle unità, moltiplicate per la sequenza di numeri $1, -1, 1, -1, \ldots$ dà un numero divisibile per 11.

Per esempio $1234 = 1 \cdot 1000 + 2 \cdot 100 + 3 \cdot 10 + 4 \cdot 1 \equiv$

$$\equiv 1 \cdot (-1) + 2 \cdot 1 + 3 \cdot (-1) + 4 \cdot 1 =$$

$$= -1 + 2 - 3 + 4 = 2 \equiv 2 \pmod{11}$$

non è divisibile per 11 (dà resto 2) mentre 1232 lo è $(1232 : 11 = 112)$.