

L' algoritmo di Euclide

①

Un **algoritmo** è un procedimento di calcolo.

Euclide scoprì un algoritmo per determinare il **massimo comun divisore** di due numeri.

Il suo metodo si basa sull'osservazione del fatto che, dividendo il più grande dei due numeri per il più piccolo, **il dividendo e il divisore** hanno lo stesso MCD di **divisore e resto**.

Per esempio, il MCD di 28 e 36 è 4, che è anche il MCD di 28 e 8, di 8 e 4 e di 4 e 0.

$$\begin{array}{r|l} 36 & 28 \\ \hline 8 & 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 28 & 8 \\ \hline 4 & 3 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 8 & 4 \\ \hline 0 & 2 \end{array}$$

Il motivo per cui ciò accade è che il dividendo e il divisore sono entrambi divisibili per il MCD e quindi anche il

resto risulta divisibile per il MCD. (2)

Nell'esempio precedente :

$$36 = 28 \cdot 1 + 8 \quad \text{da cui}$$

$$4 \cdot 9 = 4 \cdot 7 \cdot 1 + 8 \quad (\text{MCD} = 4)$$

$$4 \cdot 9 - 4 \cdot 7 = 8$$

$8 = 4 \cdot (9 - 7)$ quindi il resto (8) è divisibile per il MCD (4).

Si ottengono così coppie di numeri, via via più piccoli, che hanno lo stesso MCD.

In questo modo si può semplificare la ricerca del MCD.

L'ultimo resto è sempre nullo

Esempio

Trova il MCD di 258 e 120.

$$\begin{array}{r} 258 \\ 18 \end{array} \Bigg| \begin{array}{r} 120 \\ 2 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 120 \\ 12 \end{array} \Bigg| \begin{array}{r} 18 \\ 6 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 18 \\ 6 \end{array} \Bigg| \begin{array}{r} 12 \\ 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 12 \\ 0 \end{array} \Bigg| \begin{array}{r} 6 \\ 2 \end{array}$$

Il MCD tra 0 e 6 è 6, che è anche il MCD tra 258 e 120.

Esercizi

Trova, usando l'algoritmo euclideo,

il MCD di :

a) 187, 77

b) 105, 385

c) 245, 193

$$\begin{array}{r}
 187 \overline{) 77} \\
 33 \overline{) 2}
 \end{array}
 , \quad
 \begin{array}{r}
 77 \overline{) 33} \\
 11 \overline{) 2}
 \end{array}
 , \quad
 \begin{array}{r}
 33 \overline{) 11} \\
 0 \overline{) 3}
 \end{array}
 , \quad \text{MCD} = 11$$

$$\begin{array}{r}
 385 \overline{) 105} \\
 70 \overline{) 3}
 \end{array}
 , \quad
 \begin{array}{r}
 105 \overline{) 70} \\
 35 \overline{) 1}
 \end{array}
 , \quad
 \begin{array}{r}
 70 \overline{) 35} \\
 35 \overline{) 1}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 35 \overline{) 35} \\
 0 \overline{) 1}
 \end{array}
 , \quad \text{MCD} = 35$$

$$\begin{array}{r}
 245 \overline{) 193} \\
 52 \overline{) 1}
 \end{array}
 , \quad
 \begin{array}{r}
 193 \overline{) 52} \\
 37 \overline{) 3}
 \end{array}
 , \quad
 \begin{array}{r}
 52 \overline{) 37} \\
 15 \overline{) 1}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 37 \overline{) 15} \\
 7 \overline{) 2}
 \end{array}
 , \quad
 \begin{array}{r}
 15 \overline{) 7} \\
 1 \overline{) 2}
 \end{array}
 , \quad
 \begin{array}{r}
 7 \overline{) 1} \\
 0 \overline{) 7}
 \end{array}
 , \quad \text{MCD} = 1$$

(245 e 193 sono primi fra loro)