

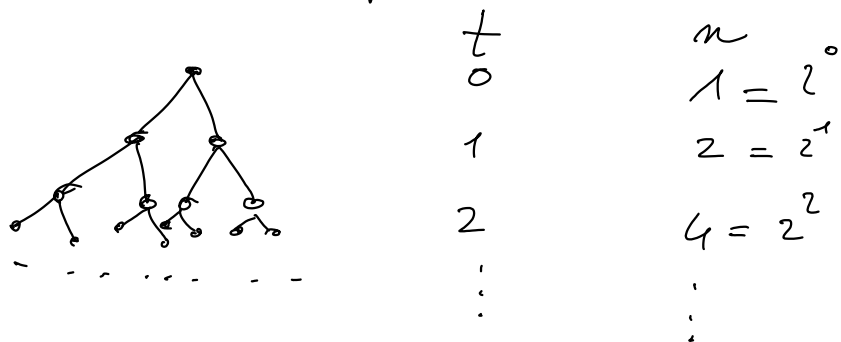
Fenomeni a crescita esponenziale

1

• Crescita di una colonia di batteri

Se ogni ora ogni batterio si divide in due dando origine a 2 batteri, quanti batteri si avranno, dopo t ore, a partire da un unico batterio?

Il loro numero raddoppia ogni ora:



Si ottiene la legge di crescita $n(t) = 2^t$

• Crescita di un capitale ad interesse composto

Se abbiamo un capitale C ad interesse i , per esempio $C_0 = 1000 \text{ €}$ e $i = 2\%$ annuo, dopo un anno si ha:

$$C_1 = C_0 + C_0 \cdot i = C_0 (1+i) = 1000 (1,02)$$

dopo un altro anno si ha:

$$C_2 = C_1 + C_1 \cdot i = C_1 (1+i) = C_0 (1+i)^2$$

dopo n anni il capitale diventerà:

$$C_n = C_0 (1+i)^n$$

• Legge del decadimento radioattivo

2

Se al tempo $t=0$ si ha una quantità m_0 di sostanza, il decadimento radioattivo consiste nel dimezzamento della quantità di sostanza ad intervalli regolari di tempo (tempo di dimezzamento $t_{1/2}$):

$t(t_{1/2})$	m
0	m_0
1	$\frac{1}{2} m_0$
2	$(\frac{1}{2})^2 m_0$
...	...

che corrisponde alla legge

$$m(t) = m_0 \left(\frac{1}{2}\right)^{t/t_{1/2}}$$

¶ I casi considerati sono tutti esempi di **variazione esponenziale**.

Le leggi:

$$n(t) = 2^t, \quad C_n = C_0 (1+i)^n, \quad m(t) = m_0 \left(\frac{1}{2}\right)^{t/t_{1/2}}$$

sono **leggi esponenziali**.

Hanno tutte in comune la variabile all' esponente.

Sono tutti esempi che derivano dalla

funzione esponenziale

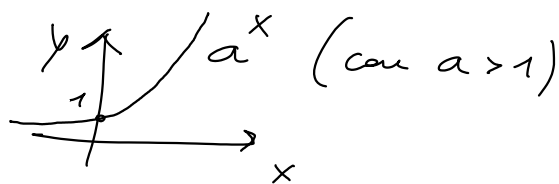
$$y = a^x$$

3

Il grafico di $y = a^x$

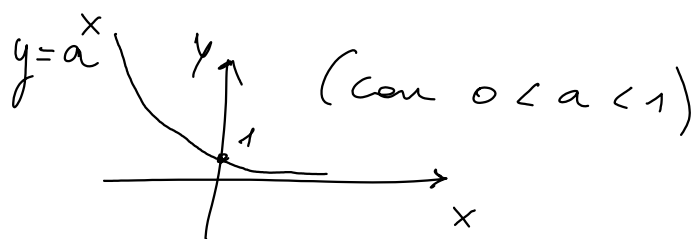
- Se $a > 1$ si hanno curve crescenti (prova con GeoGebra), per esempio

$$y = 2^x, \quad y = 3^x$$



- Se $a < 1$ invece si hanno curve

decrescenti, per esempio $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$, $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$



Le curve sono simmetriche quando le basi sono reciproche:

$$y = a^{-x} = \frac{1}{a^x} = \left(\frac{1}{a}\right)^x$$

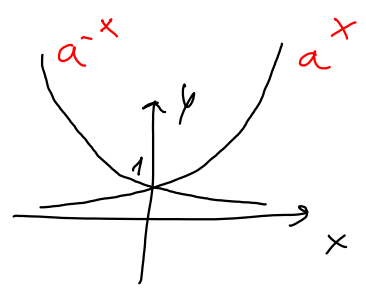
La base a deve sempre essere ≥ 0 altrimenti potrebbero presentarsi situazioni molto complicate, per esempio la funzione si potrebbe calcolare solo per alcuni valori:

$$\text{es. } (-1)^x \Rightarrow (-1)^{1/2} = \sqrt{-1} \text{ non esiste, } (-1)^{1/3} = \sqrt[3]{-1} = -1$$

Trasformazioni delle funzione esponenziale

La simmetria rispetto all'asse y
l'abbiamo già incontrata:

$$a^{-x} = \frac{1}{a^x} = \left(\frac{1}{a}\right)^x$$

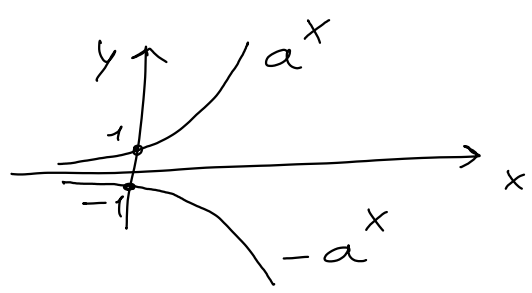


Per esempio $y = 2^{-x} = \frac{1}{2^x} = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ è la
simmetrica rispetto all'asse y della
funzione $y = 2^x$.

Simmetria rispetto all'asse x

In questo caso si cambia segno alle y:

$$y = a^x \rightarrow -y = a^x \rightarrow y = -a^x$$



Esempio:

$$y = 2^x \text{ e } y = -2^x$$

Curva esponenziale traslata di

un vettore (h, k) : $y = a^x$, la

traslazione ha equazioni $\begin{cases} x' = x + h \\ y' = y + k \end{cases}$

Invertendo le equazioni e sostituendo (5)
si ottiene:
$$\begin{cases} x = x' - h \\ y = y' - k \end{cases} \quad / \quad y' - k = a^{x' - h}$$

Da cui, togliendo gli apici, si ottiene
la funzione esponenziale traslata:

$$y = k + a^{x-h}$$

(Studia con GeoGebra l'esempio

$$y = 1 + 2^{x-3})$$

Curva esponenziale dilatata

Le dilatazioni hanno equazioni:

$$\begin{cases} x' = h x \\ y' = k y \end{cases} \quad \text{invertendo e sostituendo} \\ \text{nella } y = a^x \text{ si ottiene:}$$

$$\begin{cases} x = \frac{x'}{h} \\ y = \frac{y'}{k} \end{cases} \Rightarrow \frac{y'}{k} = a^{\frac{x'}{h}}$$

Eliminando gli apici si ottiene
la funzione esponenziale dilatata

$$y = k \cdot a^{\frac{x}{h}}$$

Studia con GeoGebra l'esempio $y = 3 \cdot 2^{\frac{x}{2}}$

Esercizi

6

Individua le funzioni esponenziali:

1)

a) $y = x^2$, b) $y = 2^x$, c) $y = (x+1)^3$, d) $y = 5^{x-1}$

2) Rappresenta graficamente le funzioni:

a) $y = 4^x$, b) $y = \left(\frac{1}{5}\right)^x$, c) $y = \left(\frac{2}{7}\right)^x$, d) $y = 5^x$

3) Disegna i grafici delle funzioni:

$$y = 2^x + 5 \quad , \quad y = \left(\frac{1}{2}\right)^{x-3}$$

Esponenziali con base e

Nelle matematiche e nelle sue applicazioni sono molto usati esponenziali aventi come base il numero $e \approx 2,7183$. Si tratta di un numero irrazionale (illimitato non periodico) detto numero di Nepero.