Il dominio di una funzione

Il dominio di una funzione è l'insieme sul quale si calcolano i valori di una funzione.

Il dominio con la massima estensione si chiama campo di esistenza della funzione.

Per esempio il campo di esistenza della funzione $f(x) = \frac{1}{x}$ è $\mathbb{R} - \{0\}$, infatti la funzione $\frac{1}{x}$ si può calcolare $\forall x \neq 0$.

Si può però considerare la funzione $g(x)$ con la stessa legge $y = \frac{1}{x}$, ma su un dominio più limitato, per esempio l'intervallo $(0, 1]$:

$$g(x) = \frac{1}{x} \quad \text{per} \quad x \in (0, 1] \text{ .}$$

Una funzione è dunque caratterizzata dalla legge e dal dominio.

Esercizi

Determina il campo di esistenza delle seguenti funzioni.

1) $y = \dfrac{3x-1}{x+2}$

$x+2=0$ per $x=-2$, quindi $CE = \mathbb{R} - \{-2\}$

2) $y = \dfrac{x}{x^4-1}$

$$y = \frac{x}{(x^2-1)(x^2+1)} = \frac{x}{(x+1)(x-1)(x^2+1)}$$

La funzione non si può calcolare per $x=-1$ e $x=+1$, quindi $CE = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$.

Questo insieme può essere scritto anche nella forma $CE = (-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty)$.

3) $y = \dfrac{2x+1}{x^2+5x+4}$

Il denominatore si annulla per

$x^2+5x+4=0$, $(x+4)(x+1)=0$, $x=-4$, $x=-1$,

quindi $CE = \mathbb{R} - \{-4, -1\} = (-\infty, -4) \cup (-4, -1) \cup (-1, +\infty)$.

4) $y = \sqrt{x+2}$

Il radicando deve essere non negativo quindi $x+2 \geq 0$, $x \geq -2$ da cui

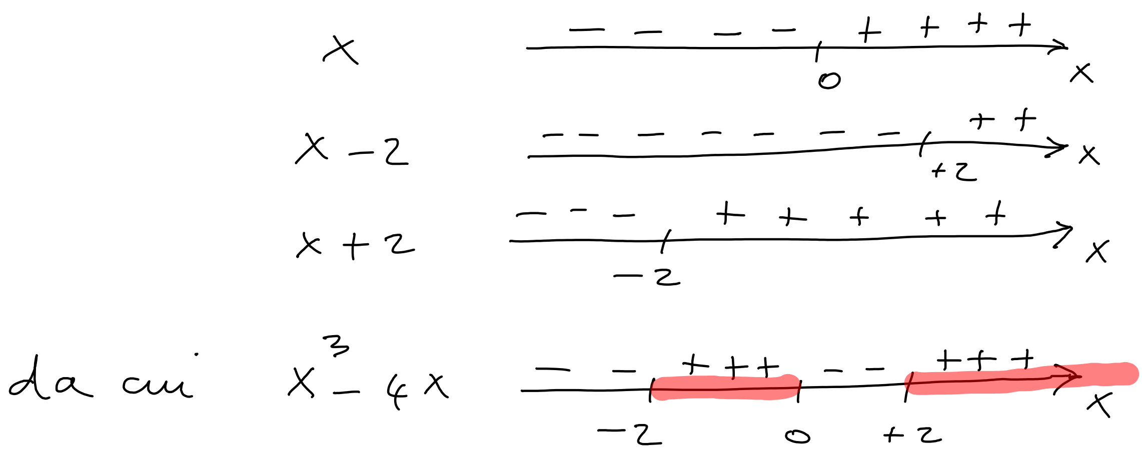
$CE = \{x \in \mathbb{R} \,/\, x \geq -2\} = [-2, +\infty)$

5) $y = \sqrt{x^3 - 4x}$

Deve essere $x^3 - 4x \geq 0$, $x(x^2 - 4) \geq 0$

$x(x-2)(x+2) \geq 0$.

Analizzando il segno dei vari fattori si ha

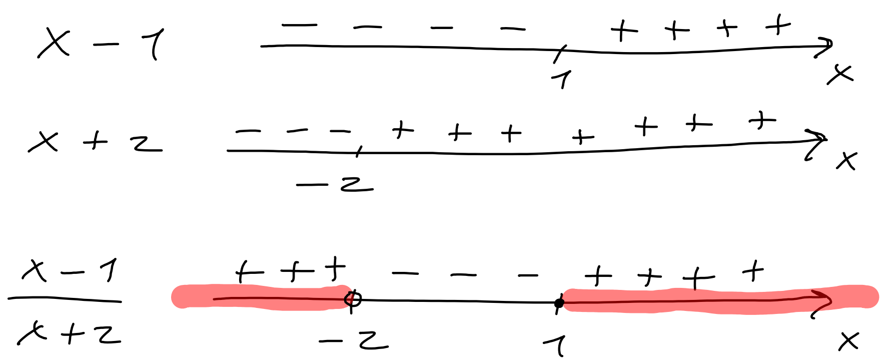


Quindi $CE = [-2, 0] \cup [+2, +\infty)$

6) $y = \sqrt{\dfrac{x-1}{x+2}}$

Deve aversi $\dfrac{x-1}{x+2} \geq 0$.

Studiando il segno di numeratore e denominatore si ottiene:



Il valore $x = -2$ deve essere scartato perchè è uno zero del denominatore, quindi $CE = \{x \in \mathbb{R} \,/\, x < -2 \ \vee \ x \geq 1\} =$

$$= (-\infty, -2) \cup [1, +\infty)$$

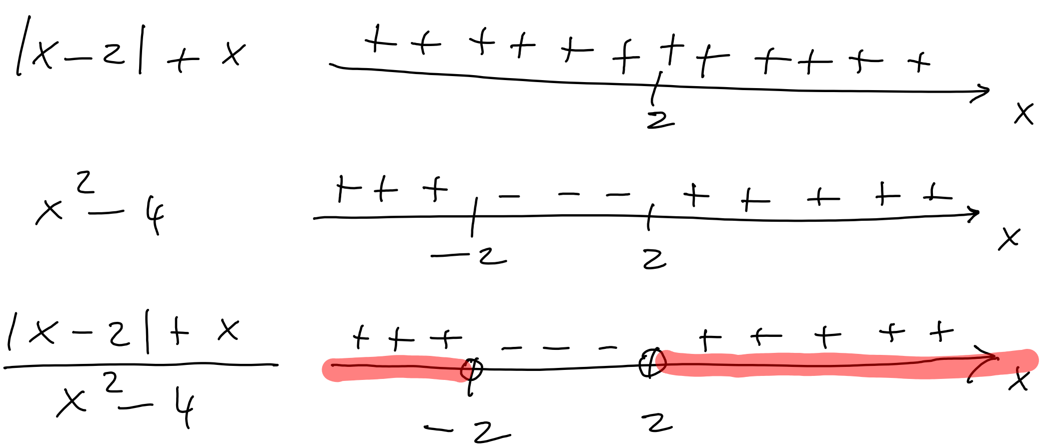
7) $y = \sqrt{\dfrac{|x-2|+x}{x^2-4}}$

$\dfrac{|x-2|+x}{x^2-4} \geq 0$ Studio il segno del numeratore:

$|x-2|+x \geq 0$, si divide in due casi:

$$\begin{cases} \text{per } x-2 \geq 0 \Rightarrow x-2+x \geq 0 \\ \text{per } x-2 < 0 \Rightarrow 2-x+x \geq 0 \end{cases}$$

quindi
$$\begin{cases} \text{per } x \geq 2 \Rightarrow 2x \ (\text{positiva}) \\ \text{per } x < 2 \Rightarrow 2 \ (\text{positiva}) \end{cases}$$



$CE = (-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$

8) $y = \tan x + \cos x$

Vanno tolti dal campo di esistenza i punti in cui non è definita la tangente:

$$CE = \mathbb{R} - \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \,,\ k \in \mathbb{Z} \right\}$$

9) $y = \dfrac{\cos x}{2\sin x - 1}$

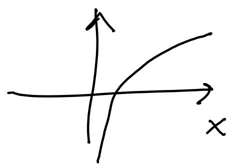
$2\sin x - 1 \neq 0 \,, \quad \sin x \neq \frac{1}{2}$

$\sin x = \frac{1}{2}$ per $x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \,, \quad x = \frac{5}{6}\pi + k2\pi$

quindi

$$CE = \mathbb{R} - \left\{ \frac{\pi}{6} + k2\pi \,,\ \frac{5}{6}\pi + k2\pi \,,\ k \in \mathbb{Z} \right\}$$

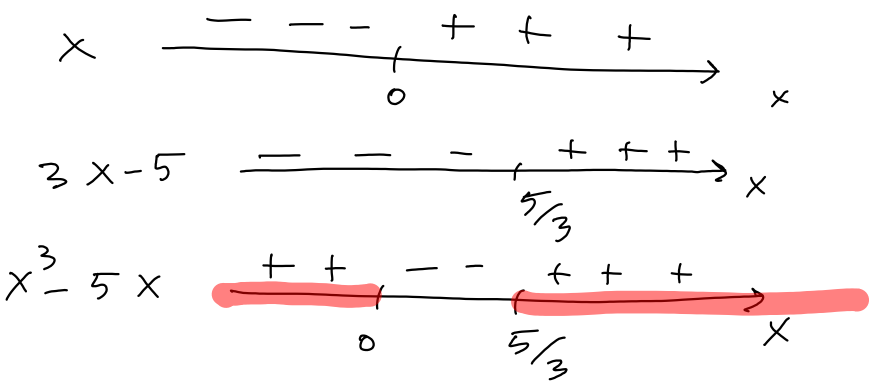
10) $y = \log_2 (3x^2 - 5x)$



$x > 0$

$3x^2 - 5x > 0$

$x(3x-5) > 0$



$$CE = (-\infty, 0) \cup \left(\frac{5}{3}, +\infty\right)$$

11) $y = \sqrt{2 - \sqrt{x-1}}$

$2 - \sqrt{x-1} \geq 0$, cioè $\sqrt{x-1} \leq 2$

entrambi i membri sono positivi
quindi si può elevare al quadrato:

$x - 1 \leq 4$, da cui $x \leq 5$

inoltre deve essere $x - 1 \geq 0$, cioè $x \geq 1$.

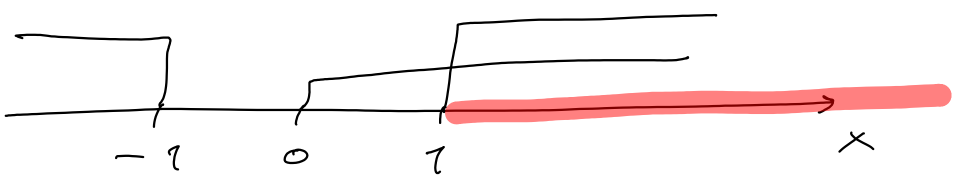
$CE = [1, 5]$

12) $y = \ln(x^2 - 1) + \sqrt{x}$

Devono essere verificate contemporaneamente
le condizioni

$$\begin{cases} x^2 - 1 > 0 \\ x \geq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x < -1 \vee x > 1 \\ x \geq 0 \end{cases}$$

Le soluzioni del sistema sono:



$x > 1$

Quindi il campo di esistenza è

$CE = (1, +\infty)$