Studio del segno di una funzione

Dopo avere determinato il dominio delle seguenti funzioni e le intersezioni con gli assi, studia la variazione del segno ed individua le zone di piano in cui si troverà il grafico.

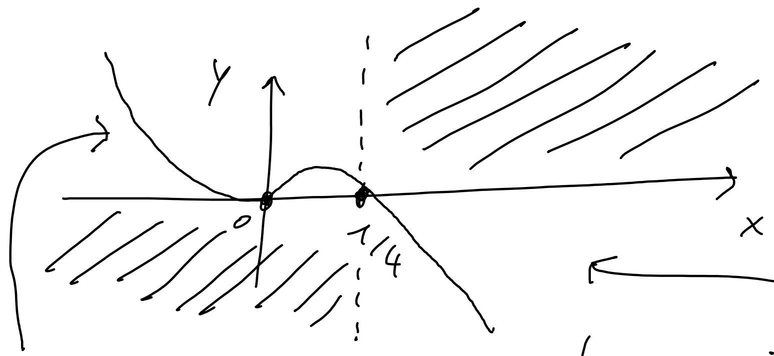
1) $y = x^2 - 4x^3$

$D = \mathbb{R}$,

interseca l'asse x per $y=0$,

cioè per $x^2(1-4x)=0$, $x=0$, $x=\frac{1}{4}$,

la funzione risulta positiva o nulla per $x^2(1-4x) \geq 0$, cioè per $x < \frac{1}{4}$.



Zone in cui si trova il grafico

$$\lim_{x \to +\infty} (x^2 - 4x^3) = -\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} (x^2 - 4x^3) = +\infty$$

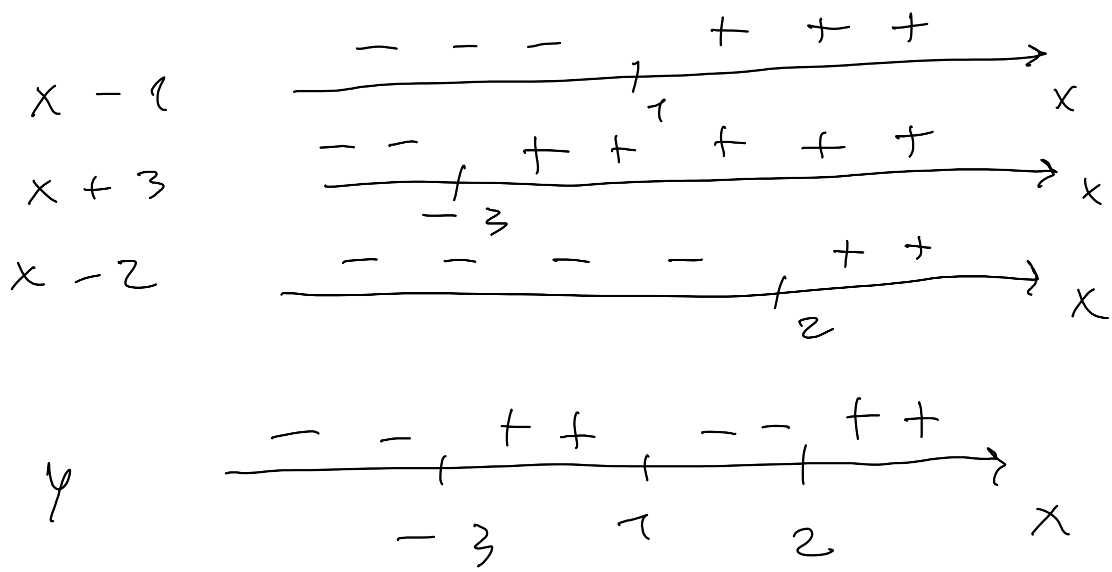
2) $y = \dfrac{x-1}{x^2+x-6}$

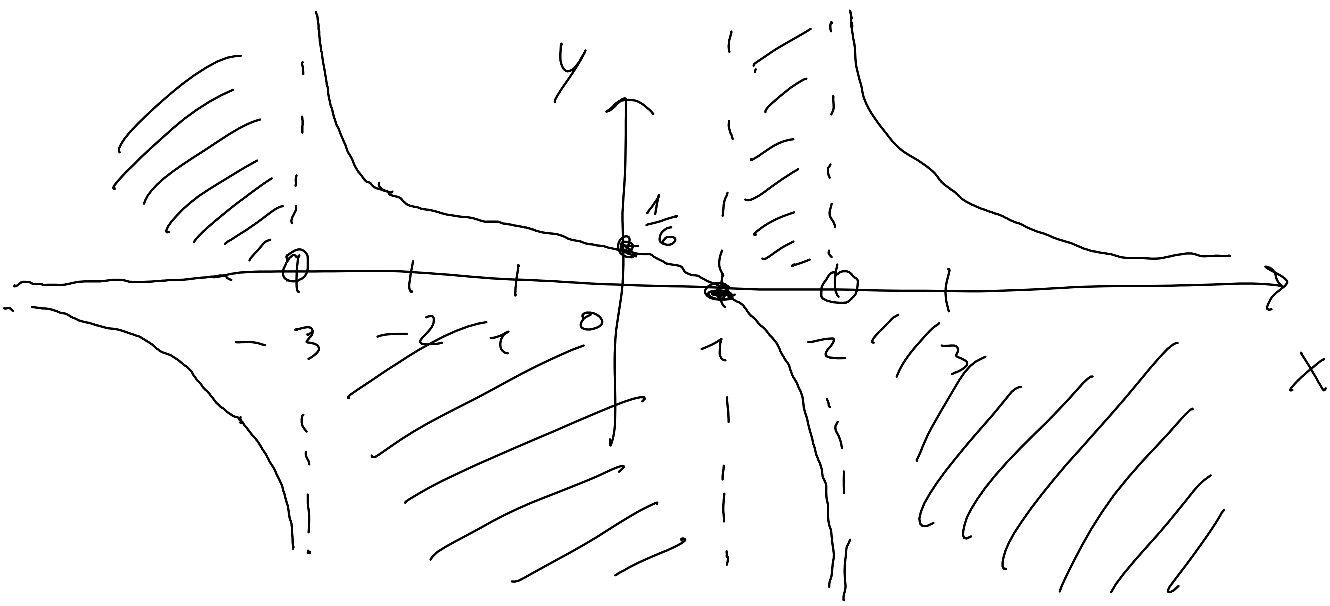
Interseca l'asse x per $y=0$, $x=1$,
interseca l'asse y per $x=0$, $y=\frac{1}{6}$.

Dominio: $y = \dfrac{x-1}{(x+3)(x-2)}$

$D = \mathbb{R} - \{-3, +2\}$

Studio il segno:





$$y = \frac{x-1}{(x+3)(x-2)}$$

limiti:

$$\lim_{x \to -3^-} \frac{x-1}{(x+3)(x-2)} = -\infty$$

$$\lim_{x \to -3^+} \frac{x-1}{(x+3)(x-2)} = +\infty$$

$$\lim_{x \to 2^-} \frac{x-1}{(x+3)(x-2)} = -\infty$$

$$\lim_{x \to -2^+} \frac{x-1}{(x+3)(x-2)} = +\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{x-1}{x^2+x-6} = 0$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x-1}{x^2+x-6} = 0$$

Dal calcolo dei limiti si determinano gli asintoti verticali $x = -3$ e $x = 2$ e l'asintoto orizzontale $y = 0$.

3) $y = \dfrac{x^4 - x}{x+3}$

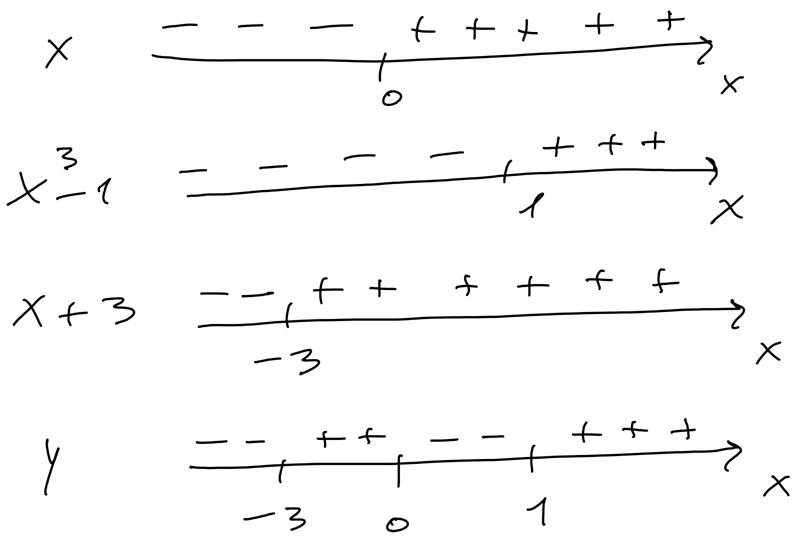
$D = \mathbb{R} - \{-3\}$

Incontra gli assi cartesiani in $(0,0)$ e $(1,0)$.

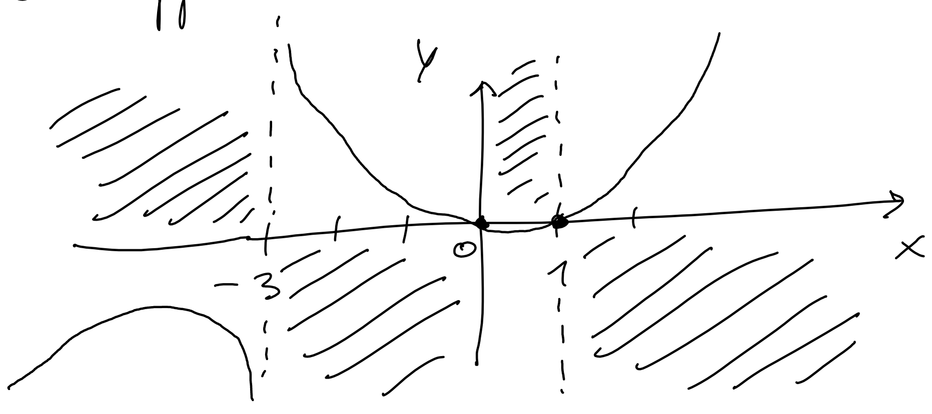
Studio il segno della funzione:

$x+3>0$ per $x>-3$

$x^4 - x > 0$ per $x(x^3-1)>0$



Il grafico della funzione dovrebbe avere approssimativamente la forma:



$\lim_{x \to +\infty} y = +\infty$, $\lim_{x \to -\infty} y = -\infty$

4) $y = \sqrt{x} - x + 2$

$D = [0, +\infty)$

Incontra l'asse y in $(0,2)$.

$\sqrt{x} - x + 2 = 0$, $\sqrt{x} = x - 2$, $x = (x-2)^2$

$x = x^2 - 4x + 4$, $x^2 - 5x + 4 = 0$, $(x-4)(x-1) = 0$

$x = 4$, $x = 1$.

Il valore $x = 1$ non è soluzione dell'equazione irrazionale.

Incontra l'asse x in $(4,0)$.

Studio il segno.

$\sqrt{x} - x + 2 > 0$, $\sqrt{x} > x - 2$

$$\begin{cases} x - 2 \geq 0 \\ x > (x-2)^2 \end{cases} \cup \begin{cases} x - 2 < 0 \\ x > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ x > x^2 - 4x + 4 \end{cases} \cup \begin{cases} x < 2 \\ x > 0 \end{cases}$$

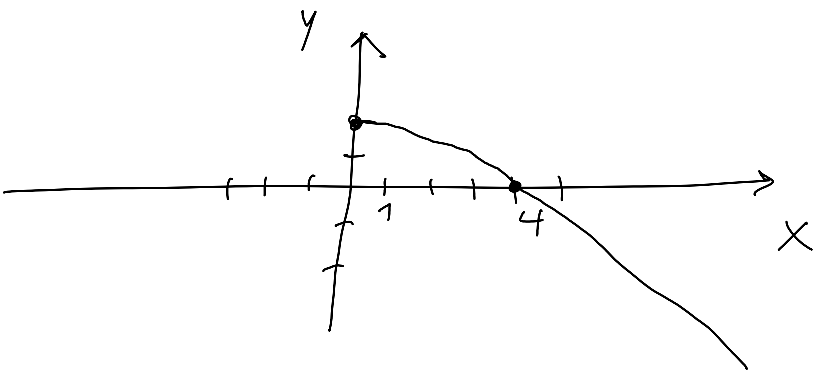
$$\begin{cases} x \geq 0 \\ x^2 - 5x + 4 < 0 \end{cases} \cup \begin{cases} x < 2 \\ x > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ 1 < x < 4 \end{cases} \cup \begin{cases} x < 2 \\ x > 0 \end{cases}$$

La funzione è positiva per

$1<x<4 \cup 0<x<2$ cioè per $0<x<4$.

Infine $\lim_{x\to+\infty} y = -\infty$, quindi il grafico dovrebbe avere un andamento del tipo

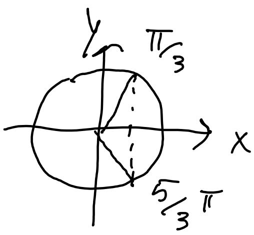


5) $$y = \frac{1}{2\cos x - 1} \quad \text{in } [0, 2\pi]$$

Dominio: $D = [0, 2\pi] - \left\{ \frac{\pi}{3}, \frac{5}{3}\pi \right\}$

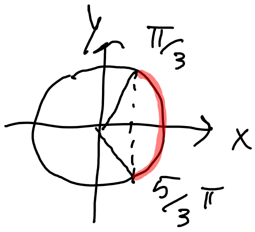
infatti $2\cos x - 1 = 0$, $\cos x = \frac{1}{2}$,

per $\frac{\pi}{3}, \frac{5}{3}\pi$



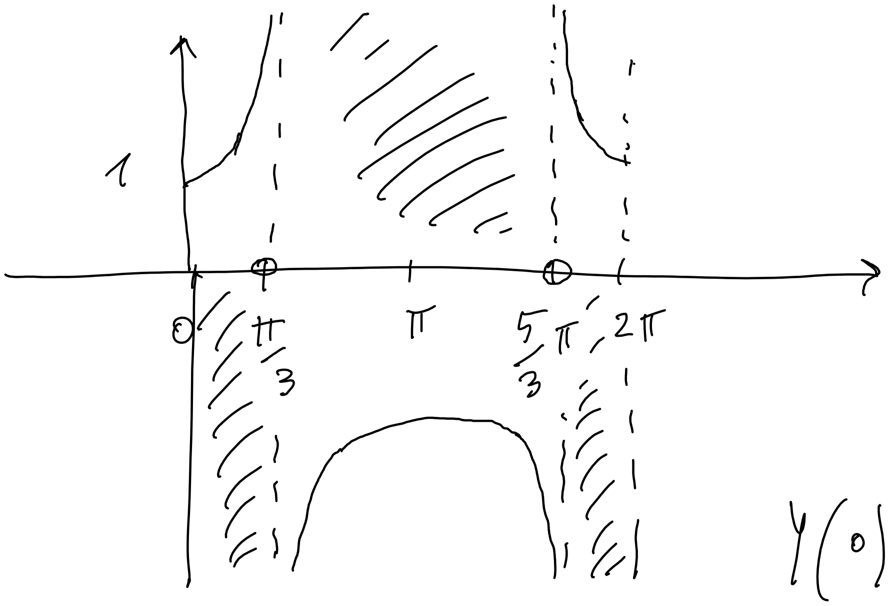
Studio del segno: $2\cos x - 1 > 0$ per

$\cos x > \frac{1}{2}$



$0 \leq x < \pi/3$ e

$\frac{5}{3}\pi < x < 2\pi$



$y(0) = \frac{1}{2\cos 0 - 1} = 1$

$\lim_{x \to \frac{\pi}{3}} y = \infty \quad , \quad \lim_{x \to \frac{5}{3}\pi} y = \infty$

6) $y = \log^2 x - \log x$

$D = (0, +\infty)$

Studio del segno: $y = \log x \,(\log x - 1)$

$\log x$: $- - -$ per $x < 1$, $+ + +$ per $x > 1$

$\log x - 1$: $- - - - - - -$ per $x < 10$, $+ +$ per $x > 10$

y: $+ + + +$ per $x < 1$, $- - -$ per $1 < x < 10$, $+ +$ per $x > 10$

In fine $\lim_{x \to 0} y = +\infty$ e $\lim_{x \to \infty} y = +\infty$

Il grafico della funzione dovebbe essere somigliante a