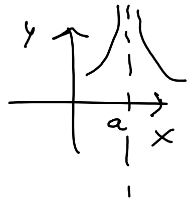
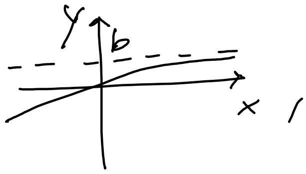
Gli asintoti di una funzione

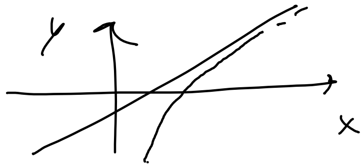
Una funzione y può avere asintoti verticali di equazione $x = a$ se $\lim_{x \to a} y = \infty$



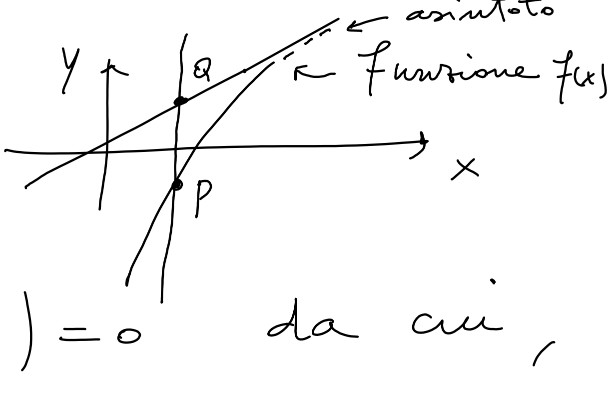
, può avere asintoti orizzontali di equazione $y = b$ se $\lim_{x \to \infty} y = b$



, può avere asintoti obliqui se si avvicina all'infinito ad una retta inclinata rispetto agli assi cartesiani



Le condizioni per l'esistenza di un asintoto obliquo e le formule per determinarne i parametri si possono ottenere dall'osservazione che la distanza verticale $\overline{PQ}$ tra funzione e retta deve tendere a zero per $x \longrightarrow \infty$ se la retta è un asintoto



Quindi $\lim_{x \to \infty} \left(f(x) - mx - q \right) = 0$ da cui, dividendo per x e passando nuovamente al limite,

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{f(x)}{x} - m - \frac{q}{x}\right) = 0 \, ,$$

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} \qquad (1)$$

Dalla $\lim_{x\to\infty}\left(f(x) - mx - q\right) = 0$ si

può poi ricavare q:

$$q = \lim_{x\to\infty}\left(f(x) - mx\right) \qquad (2)$$

Se i limiti (1) e (2) esistono finiti

allora esiste l'asintoto di equazione

$y = mx + q$.

Esempio

$$f(x) = \frac{x^2-4}{x}$$

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2-4}{x^2} = 1$$

$$q = \lim_{x\to\infty}\left(f(x) - mx\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-4}{x} - x\right) =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left(\frac{\cancel{x^2}-4-\cancel{x^2}}{x}\right) = 0$$

Quindi la funzione ha un'asintoto

con $m=1$, $q=0$ ed equazione $y=x$.

Esercizi: disegna il grafico probabile delle seguenti funzioni

1) $$y=\frac{x^2-2x+5}{x-3}$$

Il dominio è $D=\mathbb{R}-\{3\}$

L'equazione $y=0$ non ha soluzioni, quindi il grafico della funzione non attraversa l'asse delle x.

Attraversa invece l'asse y in $\left(0,-\frac{5}{3}\right)$.

Studio del segno:

x^2-2x+5 $+ \; + \; + \; + \; + \; + \; +$ x

$x-3$ $- \; - \; - \; - \;|_3\; + \; + \; + \; + \; +$ x

y $- \; - \; - \; - \;|_3\; + \; + \; + \; + \; +$ x

La funzione è positiva per $x>3$ e negativa per $x<3$

La funzione ha un asintoto verticale per $x=3$, infatti

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-2x+5}{x-3}=\lim_{x\to 3}\left(x+1+\frac{8}{x-3}\right)=\infty$$

(dopo aver eseguito la divisione dei polinomi

$$
\begin{array}{rr|l}
x^2 - 2x + 5 & & x-3 \\ \cline{3-3}
x^2 - 3x & & x+1 \\ \cline{1-1}
// \quad x + 5 & & \\
x - 3 & & \\ \cline{1-1}
// \quad 8 & &
\end{array}
$$
)

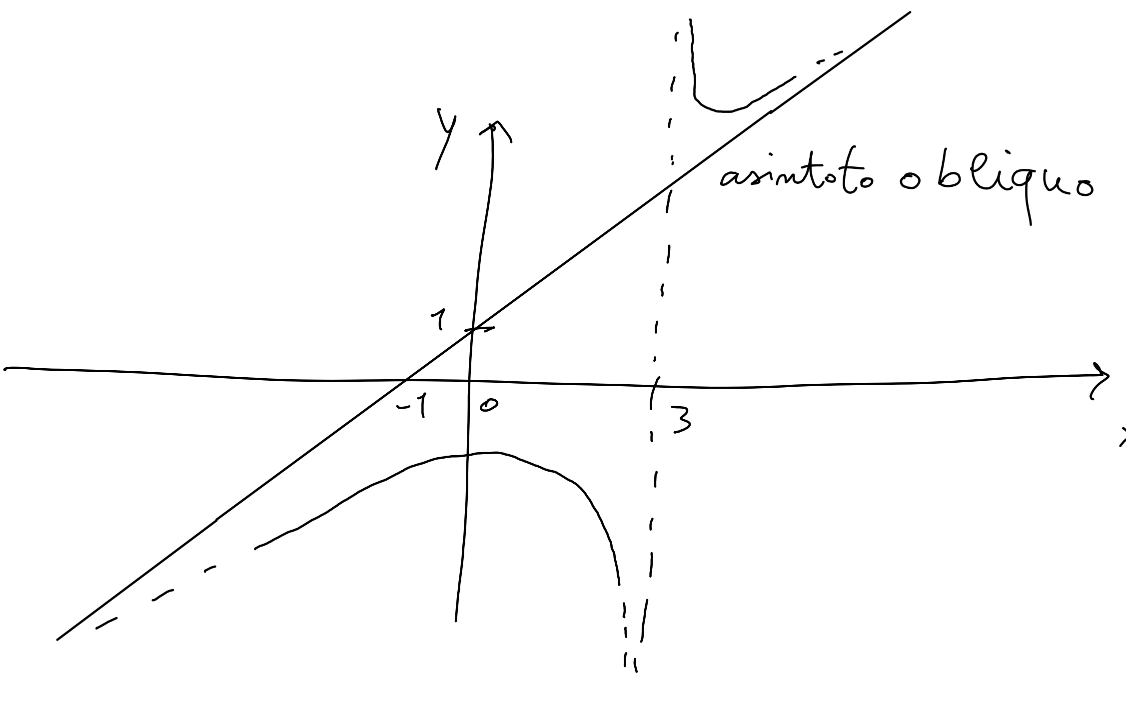
Infine la funzione ha un asintoto obliquo:

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2-2x+5}{x(x-3)} = 1$$

$$q = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-2x+5}{x-3} - x\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{\cancel{x^2}-2x+5-\cancel{x^2}+3x}{x-3} = 1$$

L'asintoto ha equazione $y = x+1$.

Il grafico della funzione dovrebbe avere approssimativamente l'aspetto:



2) $y = \sqrt{x^2-4x+3}$ (5)

$D = \mathbb{R} - (1,3) \quad \left(\text{per } x^2-4x+3 \geq 0\right)$

$y = 0$ per $x = 1$ e $x = 3$

La funzione è positiva nel dominio

Asintoti obliqui

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x^2-4x+3}}{x} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \sqrt{\frac{x^2-4x+3}{x^2}} = 1 = m$$

$$\lim_{x \to +\infty} (y - mx) = \lim_{x \to +\infty} \left(\underbrace{\sqrt{x^2-4x+3}}_{\to +\infty} - \underbrace{x}_{\to -\infty}\right) =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{\cancel{x^2} - 4x + 3 - \cancel{x^2}}{\sqrt{x^2-4x+3} + x} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{\cancel{x}\left(-4 + \frac{3}{x}\right)}{\cancel{x}\left(\sqrt{1 - \frac{4}{x} + \frac{3}{x^2}} + 1\right)} = -2$$

1° asintoto obliquo $\longrightarrow$ $y = x - 2$

6

Per $x \to -\infty$ si trova un secondo asintoto obliquo: $y = -x+2$