

# Le proprietà dei logaritmi

①

Dalla definizione di logaritmo si deducono le seguenti due uguaglianze:

$$\log_a a^x = x, \quad a^{\log_a x} = x$$

La prima vale per tutti i valori di  $x$ , la seconda solo per  $x$  positivi, infatti il logaritmo si può calcolare solo per  $x$  positivi.

I logaritmi godono di **proprietà** che derivano dalle proprietà delle potenze.

$$a) \log_a (x \cdot y) = \log_a x + \log_a y,$$

infatti

$$\log_a (x \cdot y) = \log_a (a^{\log_a x} \cdot a^{\log_a y}) =$$

$$= \log_a a^{\log_a x + \log_a y} = \log_a x + \log_a y$$

In modo analogo si dimostra

la proprietà relativa alla divisione:

$$b) \log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$$

Un'altra proprietà è legata alla proprietà delle potenze di potenze:

$$c) x \cdot \log_a y = \log_a y^x,$$

infatti

$$\begin{aligned} x \cdot \log_a y &= \log_a a^{x \cdot \log_a y} = \\ &= \log_a (a^{\log_a y})^x = \log_a y^x \end{aligned}$$

Infine vale una proprietà, detta del cambiamento di base, che permette di esprimere il logaritmo in una base per mezzo del logaritmo in un'altra base:

$$\log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b}$$

infatti

③

$$\log_b x = \log_b a^{\log_a x} = \log_a x \cdot \log_b a$$

(per la proprietà c),

$$\text{da cui: } \log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$$

Quest'ultima formula risulta molto utile per calcolare i logaritmi in basi diverse da 10 ed  $e$  (numero di Nepero), le uniche presenti sulle macchine calcolatrici.

Sulle calcolatrici i logaritmi decimali (in base 10) sono di solito indicati con il simbolo  $\boxed{\log}$ , mentre i logaritmi naturali (in base  $e$ ) sono indicati con il simbolo  $\boxed{\ln}$ .

Esempio

$$\log_2 5 = \frac{\log_{10} 5}{\log_{10} 2}$$

## Esercizi

4

Calcola le seguenti espressioni utilizzando le proprietà dei logaritmi:

$$1) \log_2 (4 \sqrt[10]{2}) =$$

$$= \log_2 (2^2 \cdot 2^{\frac{1}{10}}) = \log_2 2^{2 + \frac{1}{10}} = 2 + \frac{1}{10} = \frac{21}{10}$$

$$2) \ln \frac{8}{7 \sqrt[3]{2}} =$$

$$\begin{aligned} &= \ln 8 - \ln 7 - \frac{1}{3} \ln 2 = \ln 2^3 - \ln 7 - \frac{1}{3} \ln 2 = \\ &= 3 \ln 2 - \ln 7 - \frac{1}{3} \ln 2 = \frac{8}{3} \ln 2 - \ln 7 \end{aligned}$$

Calcola, usando la calcolatrice, il seguente logaritmo passando ai logaritmi decimali ed anche a quelli naturali (si deve ottenere lo stesso risultato):

$$3) \log_7 \frac{17}{2} =$$

$$= \log_7 8,5 = \frac{\log_{10} 8,5}{\log_{10} 7} = \frac{\ln 8,5}{\ln 7} \cong 1,09978$$