

Le equazioni esponenziali

1

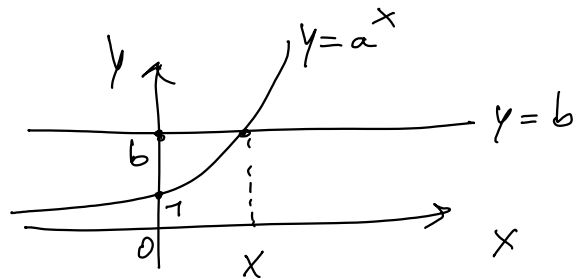
Un'equazione esponenziale è un'equazione in cui l'incognita compare nell'esponente di una o più potenze.

Equazioni esponenziali elementari

Sono le equazioni che si presentano nella forma $a^x = b$.

Consideriamo solo i casi con $a > 0$ (e $a \neq 1$).

Dal punto di vista grafico la soluzione è l'ascissa del punto di intersezione della curva esponenziale di equazione $y = a^x$ con la retta parallela all'asse delle ascisse di equazione $y = b$.



Il valore di x

si può ottenere calcolando il logaritmo:

$$x = \log_a b$$

Esempio

Risolvere l'equazione $3^x = 27$.

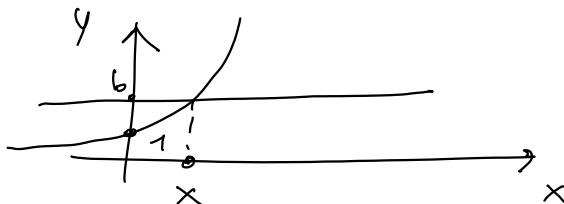
Si ha $x = \log_3 27 = 3$

Problema

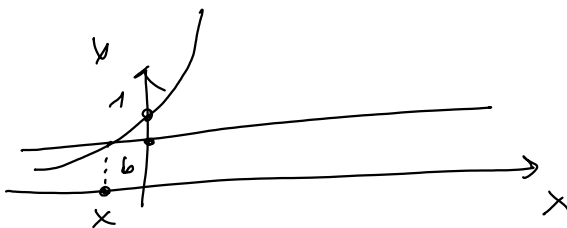
Studiare il segno delle soluzioni di $a^x = b$ in funzione dei valori di a e b .

Risposta

Se $a > 1$ l'esponenziale a^x è una funzione crescente.

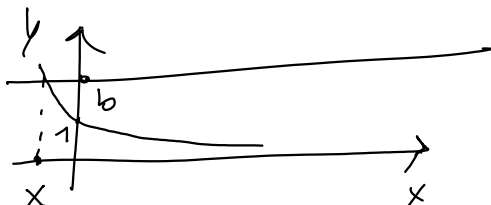


se $b > 1$ la soluzione è positiva

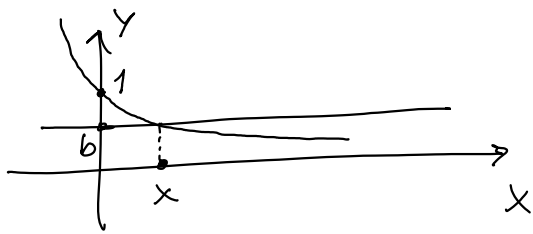


se $0 < b < 1$ la soluzione è negativa

Se $0 < a < 1$ l'esponenziale a^x è una funzione decrescente.



se $b > 1$ la soluzione è negativa



se $0 < b < 1$ la soluzione è positiva 3

Esercizi

$$1) \quad 4 \cdot 2^x = \frac{1}{4}$$

$$2^x = \frac{1}{16}, \quad 2^x = 2^{-4}, \quad x = -4$$

$$2) \quad 5^{3x^2 - x} = 1$$

$$3x^2 - x = 0, \quad x = 0, \quad x = \frac{1}{3}$$

$$3) \quad \frac{\sqrt{2^{x+1}}}{2^x} = \frac{2^{1-x}}{4}$$

$$\frac{2^{\frac{x+1}{2}}}{2^x} = \frac{2^{1-x}}{2^2}, \quad 2^{\frac{x+1}{2} - x} = 2^{1-x-2}$$

$$\frac{x+1}{2} - x = 1 - x - 2, \quad x+1 - 2x = 2 - 2x - 4, \quad x = -3$$

$$4) \quad 7 \cdot 4^x = 5 \cdot 3^x$$

$$\frac{4^x}{3^x} = \frac{5}{7}, \quad \left(\frac{4}{3}\right)^x = \frac{5}{7}, \quad x = \log_{\frac{4}{3}} \frac{5}{7}$$

(4)

$$x = \frac{\ln 5/7}{\ln 4/3} = \frac{\ln 5 - \ln 7}{\ln 4 - \ln 3}$$

$$5) 8 \cdot 6^{x-2} = 2^{x+1}$$

passando ai logaritmi:

$$\log_2 (8 \cdot 6^{x-2}) = \log_2 2^{x+1}$$

$$\log_2 8 + \log_2 6^{x-2} = x+1$$

$$3 + (x-2) \log_2 6 = x+1$$

$$x (\log_2 6 - 1) = 1 - 3 + 2 \log_2 6$$

$$x = \frac{2 (\log_2 6 - 1)}{\log_2 6 - 1}, \quad x = 2$$

$$6) 9^{3x} = 36^{4x-1}$$

passando ai logaritmi:

$$\ln 9^{3x} = \ln 36^{4x-1}$$

$$3x \ln 9 = (4x-1) \ln 36,$$

$$x (3 \ln 9 - 4 \ln 36) = - \ln 36$$

$$x = \frac{\ln 36}{4 \ln 36 - 3 \ln 9} =$$

⑤

$$= \frac{\ln 4 + \ln 9}{4 \ln 4 + 4 \ln 9 - 3 \ln 9} = \frac{\ln 4 + \ln 9}{4 \ln 4 + \ln 9} =$$

$$= \frac{2 \ln 2 + 2 \ln 3}{8 \ln 2 + 2 \ln 3} = \frac{\ln 2 + \ln 3}{4 \ln 2 + \ln 3}$$

$$7) \frac{4}{2^{1-x}} = \frac{3^x}{\sqrt{9^{x+1}}}$$

$$\ln \frac{4}{2^{1-x}} = \ln \frac{3^x}{9^{\frac{x+1}{2}}}$$

$$\ln 4 - \ln 2^{1-x} = \ln 3^x - \ln 9^{\frac{x+1}{2}}$$

$$\ln 4 - (1-x) \ln 2 = x \ln 3 - (x+1) \ln 3$$

$$\ln 4 - \ln 2 + x \ln 2 = - \ln 3$$

$$2 \ln 2 - \ln 2 + x \ln 2 = - \ln 3$$

$$x \ln 2 = - \ln 2 - \ln 3$$

$$x = \frac{- \ln 2 - \ln 3}{\ln 2} = - \frac{\ln 6}{\ln 2}$$