Disequazioni esponenziali

Le disequazioni esponenziali sono quelle in cui l'incognita compare nell'esponente di qualche potenza.

Le disequazioni esponenziali elementari sono quelle di tipo $a^x > b$ oppure $a^x < b$.

Se $b < 0$ tutti i numeri reali sono soluzioni della prima disequazione, mentre la seconda risulta impossibile.

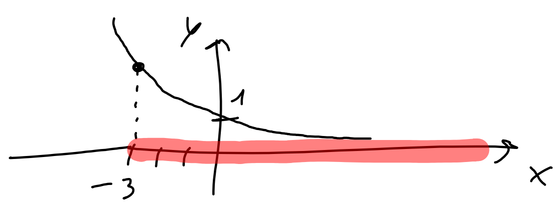
Dall'analisi grafica si ricavano le soluzioni delle disequazioni elementari:

Caso $0 < a < 1$

Esempio $\left(\frac{1}{2}\right)^x < 8$, $\left(\frac{1}{2}\right)^x < 2^3$,

$\left(\frac{1}{2}\right)^x < \left(\frac{1}{2}\right)^{-3}$

$\left(\frac{1}{2}\right)^x = \left(\frac{1}{2}\right)^{-3}$ per $x = -3$



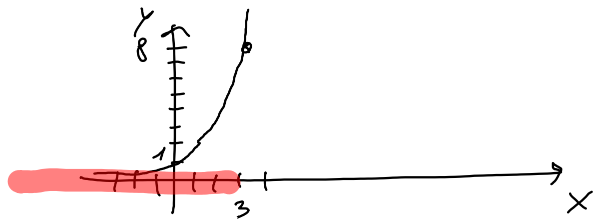
Dal grafico si vede che le soluzioni sono i valori $x > -3$.

Caso $a>1$

Esempio $2^x < 8$, $2^x = 8$ per $x = 3$

Dal grafico si vede che le soluzioni sono i valori

$x < 3$

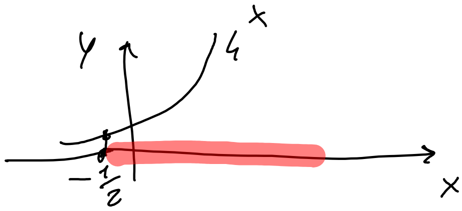


Esercizi

1) $3^{x+1} < 0$, impossibile (3^{x+1} è sempre >0)

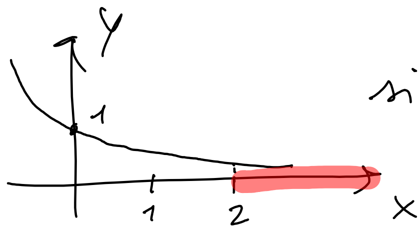
2) $4^x > \frac{1}{2}$, $2^{2x} > 2^{-1}$,

$2^{2x} = 2^{-1}$ per $2x = -1$, cioè per $x = -\frac{1}{2}$

Dal grafico: 

le soluzioni sono i valori $x > -\frac{1}{2}$

3) $\left(\frac{1}{2}\right)^x - \frac{1}{4} \leq 0$, $\left(\frac{1}{2}\right)^x \leq \left(\frac{1}{2}\right)^2$, $\left(\frac{1}{2}\right)^x = \left(\frac{1}{2}\right)^2$ per $x = 2$

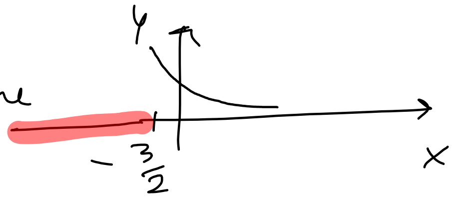
Dal grafico 

si vede che le soluzioni sono i valori $x \geq 2$

4) $\left(\frac{2}{3}\right)^{2x} \geq \frac{27}{8}$, $\left(\frac{2}{3}\right)^{2x} \geq \left(\frac{3}{2}\right)^{3}$, $\left(\frac{2}{3}\right)^{2x} \geq \left(\frac{2}{3}\right)^{-3}$

$\left(\frac{2}{3}\right)^{2x} = \left(\frac{2}{3}\right)^{-3}$ per $2x = -3$, cioè $x = -\frac{3}{2}$

Dal grafico si vede che



le soluzioni della disequazione $\left(\frac{4}{9}\right)^{x} \geq \frac{27}{8}$

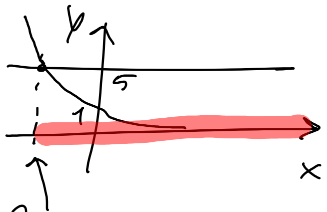
sono i valori $x \leq -\frac{3}{2}$

5) $2 \leq -3^{x}$

$3^{x} \leq -2$ impossibile

6) $5 > 2^{-x}$

$2^{-x} < 5$, dal grafico :

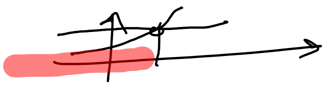


$2^{-x} = 5$ per $x = -\log_2 5 = -\frac{\ln 5}{\ln 2}$

le soluzioni sono i valori $x > -\frac{\ln 5}{\ln 2}$

7) $e^{x} + 1 < e$

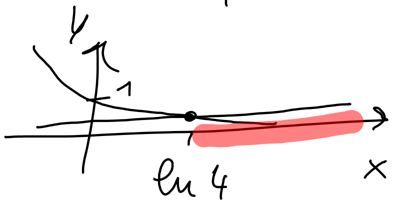
$e^{x} < e - 1$, $e^{x} = e - 1$ per $x = \ln(e-1)$



Sol. $x < \ln(e-1)$

8) $4 \cdot e^{-x} < 1$

$e^{-x} < \frac{1}{4}$, $e^{-x} = \frac{1}{4}$, $-x = \ln \frac{1}{4}$, $x = -\ln \frac{1}{4} =$
$= \ln 4$



Sol. $x > \ln 4$

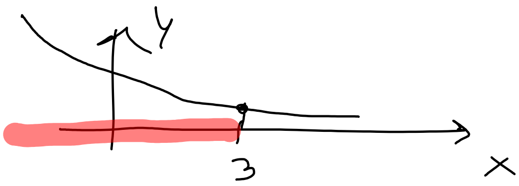
9) $2^{-x} + 2 \geq 0$

$2^{-x} \geq -2$, $\forall x \in \mathbb{R}$

10) $2 \cdot 3^{1-x} - \frac{2}{9} > 0$

$3^{1-x} > \frac{1}{9}$, $3 \cdot 3^{-x} > \frac{1}{9}$, $3^{-x} > \frac{1}{27}$

$3^{-x} = \frac{1}{27}$, $3^{-x} = 3^{-3}$, per $x = 3$



Sol. $x < 3$

11) $3^{x^2-2} < 9$

$3^{x^2-2} < 3^2$, $3^{x^2} \cdot 3^{-2} < 3^2$, $3^{x^2} < 3^4$

3^x è una funzione crescente, quindi

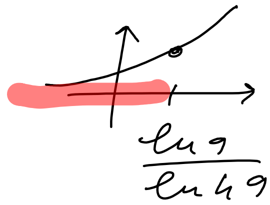
$3^{x^2} < 3^4$ se e solo se $x^2 < 4$, cioè

sse $-2 < x < 2$

12) $7^{2x} - 9 < 0$

$7^{2x} < 9$, $49^x < 9$, $49^x = 9$ per $x = \frac{\ln 9}{\ln 49} = \frac{\ln 3}{\ln 7}$

49^x è crescente quindi le soluzioni sono i valori $x < \frac{\ln 3}{\ln 7}$



13) $2^x - 2^{x+1} \geq 3$

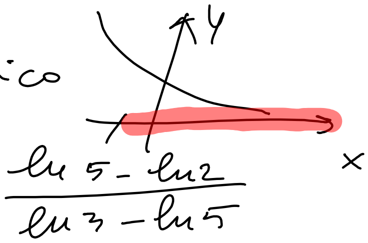
$2^x - 2^x \cdot 2 \geq 3$, $2^x(1-2) \geq 3$, $2^x \leq -3$ imposs.

14) $2 \cdot 3^x - 5^{x+1} \leq 0$

$2 \cdot 3^x - 5^x \cdot 5 \leq 0$, $\left(\frac{3}{5}\right)^x \leq \frac{5}{2}$

$\left(\frac{3}{5}\right)^x = \frac{5}{2}$ per $x = \log_{\frac{3}{5}}\left(5/2\right) = \frac{\ln 5/2}{\ln 3/5} = \frac{\ln 5 - \ln 2}{\ln 3 - \ln 5}$

Dal grafico



sol. $x \geq \frac{\ln 5 - \ln 2}{\ln 3 - \ln 5}$