# Le equazioni logaritmiche



Un'equazione si dice logaritmica se l'incognita compare come argomento di uno o più logaritmi

Esempi

1) $\log_{\frac{5}{7}} x = 1$

Dalla definizione di logaritmo si ha:

$$x = \left(\frac{5}{7}\right)^1 = \frac{5}{7}$$

2) $2\log_3 (x-1) = \log_3 (x^2+5)$

$x-1$ deve essere positivo, per poterne calcolare il logaritmo.

quindi $x-1>0$, $x>1$

riscrivendo l'equazione nella forma

$$\log_3 (x-1)^2 = \log_3 (x^2+5)$$

si vede che le soluzioni si trovano tra le soluzioni dell'equazione

$$(x-1)^2 = x^2+5$$

cioè $x^2+1-2x = x^2+5$,

da cui $2x=-4$, $x=-2$ che però si deve scartare perchè è minore di 1.

L'equazione dunque non ha soluzioni.

3) $\log(x+2)+\log x = \log(x+12)$

Intanto, per poter calcolare i logaritmi è necessario che: $\begin{cases} x+2>0 \\ x>0 \\ x+12>0 \end{cases}$ $\begin{cases} x>-2 \\ x>0 \\ x>-12 \end{cases}$ cioè $x>0$

per le proprietà dei logaritmi si può riscrivere nella forma:

$$\log((x+2)\cdot x) = \log(x+12)$$

$$\log(x^2+2x) = \log(x+12)$$

$$x^2+2x = x+12, \quad x^2+x-12=0$$

$$x = \frac{-1\pm\sqrt{1+48}}{2} = \frac{-1\pm 7}{2} = \begin{cases} 3 \\ \cancel{-4} \end{cases}$$

La soluzione $x=-4$ deve essere scartata mentre $x=3$ è una soluzione accettabile.

4) $\ln(x+7)-\ln(x-2) = \ln(x+3)-\ln x$

$$\begin{cases} x+7>0 \\ x-2>0 \\ x+3>0 \\ x>0 \end{cases} \quad \begin{cases} x>-7 \\ x>2 \\ x>-3 \\ x>0 \end{cases} \quad \text{cioè} \quad x>2$$

$$\ln \frac{x+7}{x-2} = \ln \frac{x+3}{x} ,$$

$$\frac{x+7}{x-2} = \frac{x+3}{x} , \quad \frac{x(x+7)}{x(x-2)} = \frac{(x+3)(x-2)}{x(x-2)}$$

$$x^2+7x = x^2+x-6 , \quad 6x=-6, \quad x=-1$$

che è una soluzione non accettabile.

5) $\log_5(x+1) = \log_{25}(x+9)$, deve essere $x>-1$

$$\log_5(x+1) = \frac{\log_5(x+9)}{\log_5 25}$$

$$\log_5(x+1) = \frac{1}{2} \cdot \log_5(x+9)$$

$$\log_5(x+1) = \log_5(x+9)^{\frac{1}{2}}$$

Deve essere $\begin{cases} x>-1 \\ x>-9 \\ x+1 = \sqrt{x+9} \end{cases}$ cioè $\begin{cases} x>-1 \\ x+1=\sqrt{x+9} \end{cases}$

Elevando al quadrato:

$(x+1)^2 = x+9$ , $x^2+2x+1 = x+9$

$x^2+x-8=0$ , $x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+32}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{33}}{2}$

La soluzione negativa si deve scartare perché deve essere $x > -1$.

La soluzione positiva deve essere verificata.

Occorre verificare che

$$\frac{-1+\sqrt{33}}{2} + 1 \overset{?}{=} \sqrt{\frac{-1+\sqrt{33}}{2} + 9}$$

$$\downarrow \qquad\qquad \downarrow$$

$$\frac{1+\sqrt{33}}{2} \qquad\qquad \sqrt{\frac{17+\sqrt{33}}{2}}$$

Elevando al quadrato si vede che sono uguali:

$$\left(\frac{1+\sqrt{33}}{2}\right)^2 = \frac{1+33+2\sqrt{33}}{4} = \frac{17+\sqrt{33}}{2}$$

Quindi $\frac{-1+\sqrt{33}}{2}$ è la sola soluzione dell'equazione.

6) $2(\log_2 x)^2 - 5\log_2 x - 3 = 0$

$2\log_2^2 x - 5\log_2 x - 3 = 0$

(valgono le identità $\log^2 x = (\log x)^2$ e $\log x^2 = \log(x^2)$)

L'equazione è di secondo grado nell'incognita $\log_2 x$:

$$\log_2 x = \frac{5 \pm \sqrt{25+24}}{4} = \begin{cases} 3 \\ -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Si ottengono 2 soluzioni:

$$\log_2 x = 3 \longrightarrow x = 2^3 = 8$$

$$\log_2 x = -\frac{1}{2} \longrightarrow x = 2^{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

7) $\log_3(4x+1) = \log_3 x + 3$

$$\log_3(4x+1) = \log_3 x + \log_3 27$$

$$\log_3(4x+1) = \log_3(27x)$$

Deve essere $\begin{cases} 4x+1>0 \\ x>0 \end{cases}$ cioè $x>0$

poi $4x+1 = 27x$, $23x = 1$, $x = \frac{1}{23}$

che è una soluzione accettabile ($\frac{1}{23}>0$).

8) $\begin{cases} \log x + \log y = 1 \\ x+y = 11 \end{cases}$ $\begin{cases} \log x + \log(11-x) = 1 \\ y = 11-x \end{cases}$ (Deve essere $\begin{cases} x>0 \\ 11-x>0 \end{cases}$ cioè $0<x<11$)

$\begin{cases} \log(x\cdot(11-x)) = 1 \\ y = 11-x \end{cases}$ $\begin{cases} x\cdot(11-x) = 10 \\ y = 11-x \end{cases}$

$$\begin{cases} x^2 - 11x + 10 = 0 \\ y = 11 - x \end{cases} \qquad \begin{cases} x = \dfrac{11 \pm \sqrt{121 - 40}}{2} \\ y = 11 - x \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \dfrac{11 \pm 9}{2} = \begin{matrix} 1 \\ 10 \end{matrix} \\ y = 11 - x \end{cases}$$

Le soluzioni sono entrambe accettabili ($0 < x < 11$)

Le soluzioni del sistema sono quindi:

$(1, 10)$ e $(10, 1)$.