

Diseguazioni logaritmiche

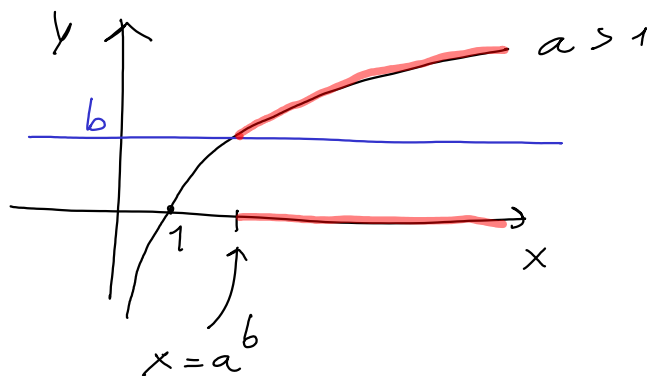
1

Le diseguazioni elementari sono quelle del tipo $\log_a x > b$ oppure $\log_a x < b$

Si risolvono con il metodo grafico.

Se $a > 1$ le curve logaritmiche sono crescenti e le soluzioni sono quelle evidenziate in rosso:

$$\log_a x > b$$

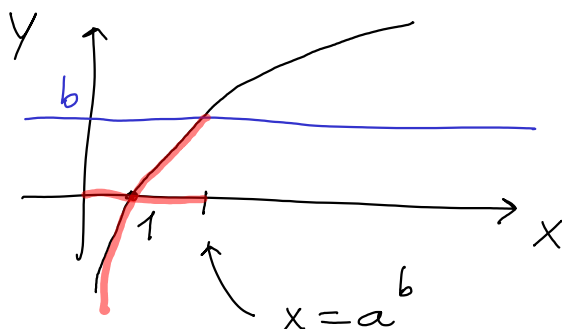


$$\text{Sol. } x > a^b$$

Dove $x = a^b$ è la soluzione dell'equazione associata $\log_a x = b$.

Allo stesso modo, sempre per $a > 1$,

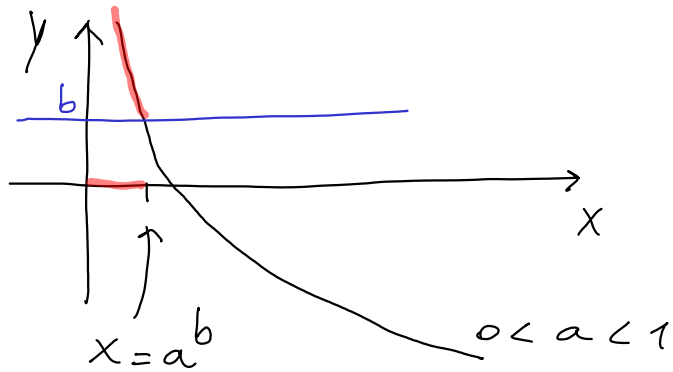
$$\log_a x < b$$



$$\text{Sol. } 0 < x < a^b$$

Se $0 < a < 1$ le curve logaritmiche sono decrescenti e le soluzioni sono quelle evidenziate in rosso :

$$\log_a x > b$$

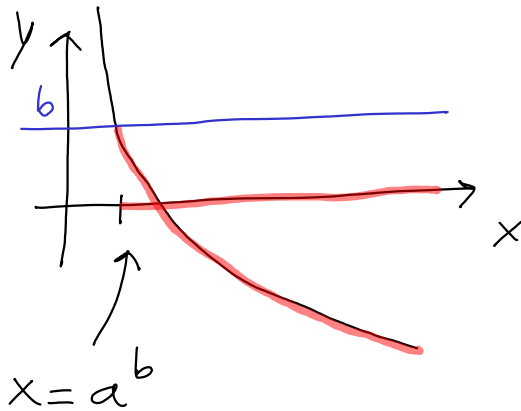


Sol. $0 < x < a^b$

Dove $x = a^b$ è la soluzione dell'equazione associata $\log_a x = b$.

Allo stesso modo, sempre per $0 < a < 1$,

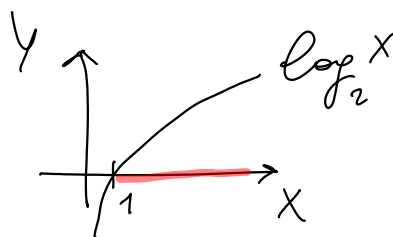
$$\log_a x < b$$



Sol. $x > a^b$

Esercizi

1) $\log_2 (5x + 1) > 0$



Il logaritmo è positivo se l'antilogaritmo

e maggiore di 1.

3

Quindi deve aversi: $5x+1 > 1$,

da cui $x > 0$

$$2) \ln(x^2+1) < \ln(2x+4)$$

la base di questi logaritmi è $e \approx 2,71 > 1$,

le curve sono crescenti quindi deve

essere $x^2+1 < 2x+4$, inoltre deve

valere la condizione $2x+4 > 0$ (l'espressione x^2+1 è evidentemente positiva).

Si ottiene quindi $x > -\frac{4}{2}$, $x > -2$ (condizione di esistenza)

$x^2-2x-3 < 0$ gli zeri del polinomio

sono: $x = 1 \pm \sqrt{1+3} = 1 \pm 2 = \begin{matrix} 3 \\ -1 \end{matrix}$

Le soluz. della disequazione di 2° grado

sono quindi: $-1 < x < 3$.

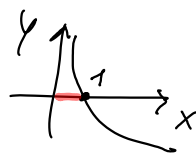
Sono tutte accettabili, quindi sono anche

le soluzioni della disequazione

logaritmica: $-1 < x < 3$

3) $\log_{1/2} \frac{x+3}{x-3} > 0$, il $\log_{1/2} x$ è positivo

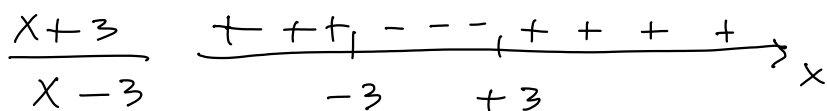
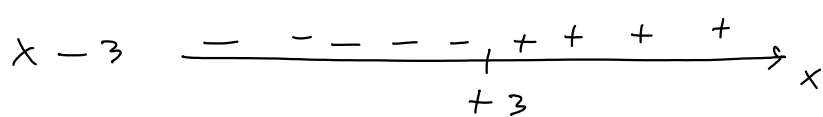
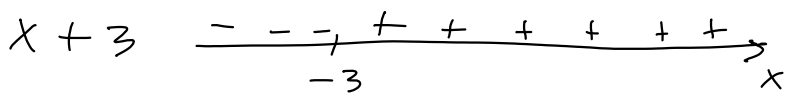
per $0 < x < 1$



Quindi l'equazione logaritmica è

equivalente al sistema $\begin{cases} \frac{x+3}{x-3} > 0 \\ \frac{x+3}{x-3} < 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{x+3}{x-3} > 0 \\ \frac{x+3-x+3}{x-3} < 0 \end{cases}$

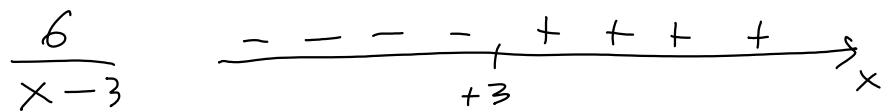
Si studia il segno della frazione $\frac{x+3}{x-3}$:



Le soluzioni della prima disequazione sono

$x < -3$ e $x > 3$

Studio il segno della frazione $\frac{6}{x-3}$:



Le soluzioni della seconda disequazione sono : $x < 3$

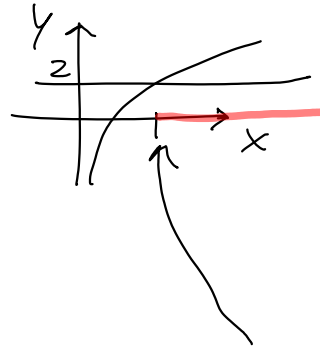
Le soluzioni del sistema sono :



$x < -3$

5

$$4) \log(x+11) > 2$$



$$\log(x+11) = 2$$

$$x+11 = 10^2, \quad x = 100 - 11 = 89$$

Sol. $x > 89$