Esercizi su equazioni e disequazioni esponenziali e logaritmiche

Equazioni esponenziali

1) $8^{x^2-2x} = \frac{1}{2}$

$(2^3)^{x^2-2x} = 2^{-1}$, $2^{3x^2-6x} = 2^{-1}$, $3x^2-6x=-1$

$3x^2-6x+1=0$, $x = \frac{3 \pm \sqrt{9-3}}{3} = \frac{3 \pm \sqrt{6}}{3}$

2) $3^{x+2} + 7\cdot 3^x = 4^{x+1} + 5\cdot 4^x$

$3^x \cdot 3^2 + 7\cdot 3^x = 4^x\cdot 4 + 5\cdot 4^x$

$9\cdot 3^x + 7\cdot 3^x = 9\cdot 4^x$

$16\cdot 3^x = 9\cdot 4^x$, $\left(\frac{3}{4}\right)^x = \frac{9}{16}$, $x=2$

3) $3^x\cdot 5 = 9^x$

$\frac{9^x}{3^x} = 5$, $3^x = 5$, $x = \log_3 5 = \frac{\ln 5}{\ln 3} \simeq 1,465$

Disequazioni esponenziali

4) $4^x - 2^{x+3} > 0$

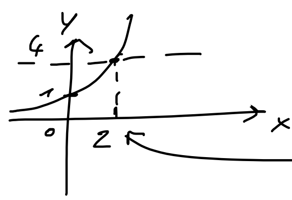
$(2^2)^x > 2^{x+3}$, $2^{2x} > 2^{x+3}$

sono esponenziali crescenti (la base è >1) quindi la disuguaglianza è valida anche per gli esponenti : $2x > x+3$, $x > 3$

5) $2^{x+3} + 2^{x+2} + 2^x \leq 52$

$8 \cdot 2^x + 4 \cdot 2^x + 2^x \leq 52$, $13 \cdot 2^x \leq 52$

$2^x \leq \frac{52}{13} = 4$



$2^x = \frac{52}{13}$ per $x = \log_2 \frac{52}{13} =$
$= \log_2 4 = 2$

Le soluzioni sono i valori $x \leq 2$

6) $3^{2x} - 8 \cdot 3^x - 9 \geq 0$

E' un'equazione di secondo grado in 3^x, come si vede bene ponendo $3^x = t$:

$t^2 - 8 \cdot t - 9 \geq 0$, da cui

$t = 4 \pm \sqrt{16+9} = 4 \pm 5 = \begin{cases} 9 \\ -1 \end{cases}$

Le soluzioni della disequazione di 2° grado sono $t \leq -1$ e $t \geq 9$

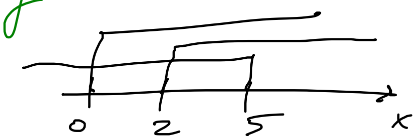
Quindi $3^x \geq 9 \Rightarrow x = 2$ e

$3^x \leq -1$ impossibile

Equazioni logaritmiche

7) $\log(5-x) + \log x = \log(x-2) + \log 2$

Condizioni di esistenza $\begin{cases} x < 5 \\ x > 0 \\ x > 2 \end{cases}$



quindi $2 < x < 5$

Usando poi le proprietà dei logaritmi si ottiene

$\log\left((5-x)\cdot x\right) = \log\left((x-2)\cdot 2\right)$ da cui

$(5-x)\cdot x = (x-2)\cdot 2$, $5x - x^2 = 2x - 4$

$x^2 - 3x - 4 = 0$, $x = \dfrac{3 \pm \sqrt{9+16}}{2} = \begin{cases} 4 \\ -1 \end{cases}$

La sola soluzione $x = 4$ è compatibile con la condizione di esistenza dei logaritmi.

8) $\log_2^2 x + 3\log_2 x - 4 = 0$

La condizione di esistenza è $x > 0$

Ponendo poi $\log_2 x = t$ si ottiene un'equazione di 2° grado: $t^2 + 3t - 4 = 0$, le cui soluzioni sono $t = \dfrac{-3 \pm \sqrt{9+16}}{2} = \begin{cases} 1 \\ -4 \end{cases}$

da cui si ottengono le equazioni logaritmiche elementari $\log_2 x = 1$ e $\log_2 x = -4$

Le soluzioni $x = 2$ e $x = \frac{1}{16}$ sono entrambe accettabili.

Disequazioni logaritmiche

9) $\log_2 x - \log_2 (x-1) \leq 2$

La condizione di esistenza dei logaritmi è

$\begin{cases} x > 0 \\ x - 1 > 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x > 0 \\ x > 1 \end{cases}$ cioè $x > 1$

$\log_2 x \leq \log_2 (x-1) + 2$, $\log_2 x \leq \log_2 (x-1) + \log_2 4$

$\log_2 x \leq \log_2 ((x-1)\cdot 4)$ i logaritmi sono crescenti (la base è >1) quindi $x \leq (x-1)\cdot 4$

$x \leq 4x - 4$, $3x \geq 4$, $x \geq \frac{4}{3}$

(compatibile con la condizione di esistenza).

10) $\log (5-x) + \log \frac{x}{2} \geq \log (x-2)$

Condizioni di esistenza: $\begin{cases} 5 - x > 0 \\ \frac{x}{2} > 0 \\ x - 2 > 0 \end{cases}$

$\begin{cases} x < 5 \\ x > 0 \\ x > 2 \end{cases}$ da cui $2 < x < 5$.

$$\log \left(\frac{(5-x)\cdot x}{2} \right) \geq \log (x-2)$$

La base è maggiore di 1 quindi

$\frac{(5-x)\cdot x}{2} \geq x - 2$ che è una disequazione di secondo grado

$$5x - x^2 \geq 2x - 4 \quad , \quad x^2 - 3x - 4 \leq 0$$

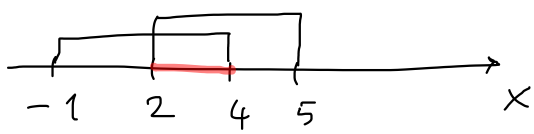
Le soluzioni dell'equazione associata

$x^2 - 3x - 4 = 0$ sono : $x = \dfrac{3 \pm \sqrt{9+16}}{2} = \begin{cases} 4 \\ -1 \end{cases}$

Le soluzioni della disequazione algebrica:

$$-1 < x < 4$$

Le soluzioni della disequazione logaritmica si ottengono intersecando con la condizione di esistenza :



$2 < x < 4$