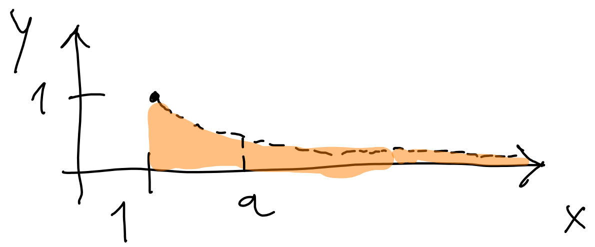
Gli integrali generalizzati

Si possono calcolare anche aree di superfici illimitate, attraverso un procedimento al limite.

Integrali definiti su intervalli infiniti

Per esempio si può considerare la funzione $\frac{1}{x^2}$ sulla semiretta $[1, +\infty)$



Per calcolare quest'area si può calcolare l'integrale definito $\int_1^a \frac{1}{x^2}\, dx$ e poi calcolare il suo limite per $a \to \infty$:

$$A(a) = \left[-\frac{1}{x} \right]_1^a = -\frac{1}{a} + 1$$

e $$\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\, dx = \lim_{x \to \infty} A(a) = \lim_{x \to \infty} -\frac{1}{a} + 1 = 1$$

In questo caso si dice che esiste l'integrale in senso generalizzato della funzione $\frac{1}{x^2}$ sull'intervallo $[1, +\infty)$ e che il suo valore è 1.

In altri casi il limite non esiste finito e si dice che non esiste l'integrale generalizzato, per esempio

$$\int_1^\infty \frac{1}{x}\, dx = \lim_{a \to \infty} \int_1^a \frac{1}{x}\, dx =$$

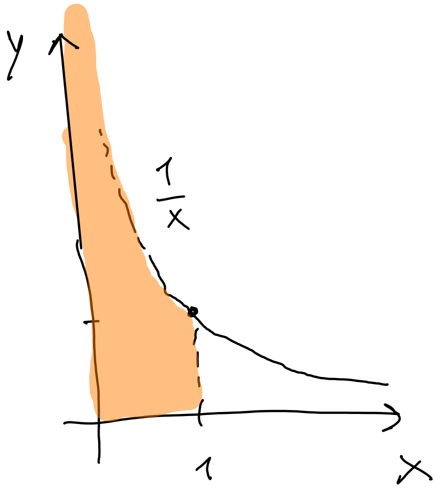
$$= \lim_{a \to \infty} (\ln a - \ln 1) = +\infty$$

In questo caso la funzione $\frac{1}{x}$ non è integrabile in senso generalizzato sull'intervallo $[1, +\infty)$.

Altri integrali generalizzati si hanno quando la funzione integranda tende a ∞ su un intervallo finito.

Per esempio:

$$\int_0^1 \frac{1}{x}\,dx$$



Si considera allora il limite

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \lim_{a\to 0} \int_a^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx =$$

$$= \lim_{a\to 0} \left[\, 2\sqrt{x}\,\right]_a^1 =$$

$$= \lim_{a\to 0} \left(2 - 2\sqrt{a} \right) = 2$$

La funzione $\sqrt{x}$ è quindi integrabile in senso generalizzato sull'intervallo $[0,1]$ e l'integrale vale 2.

Non è integrabile invece la $\frac{1}{x}$:

$$\int_0^1 \frac{1}{x}\,dx = \lim_{a\to 0} \int_a^1 \frac{1}{x}\,dx =$$

$$= \lim_{a\to 0} \left[\, \ln x \,\right]_a^1 = \lim_{a\to 0} (-\ln a) = +\infty$$