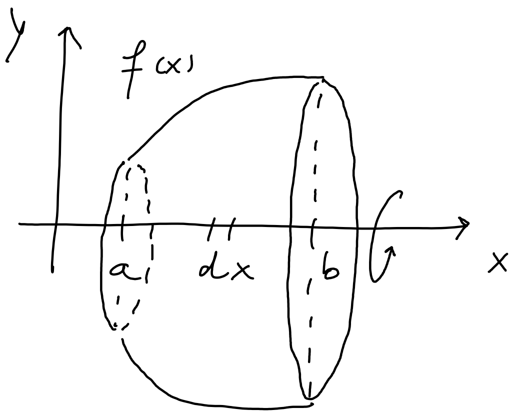
Volumi di solidi di rotazione

Data una funzione $f(x)$ definita su un intervallo $[a, b]$, consideriamo il solido ottenuto dalla rotazione del grafico della funzione attorno all'asse x (figura 1):

(1)



(2)

Il volume può essere considerato come somma di cilindri infinitesimi di raggio di base $f(x)$ e altezza dx (vedi figura 2):

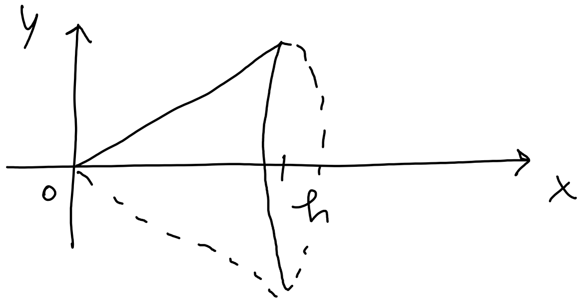
$$dV = \pi f^2(x)\, dx$$

Integrando si ottiene il volume:

$$V = \int dV = \pi \int_a^b f^2(x)\, dx$$

Esempi

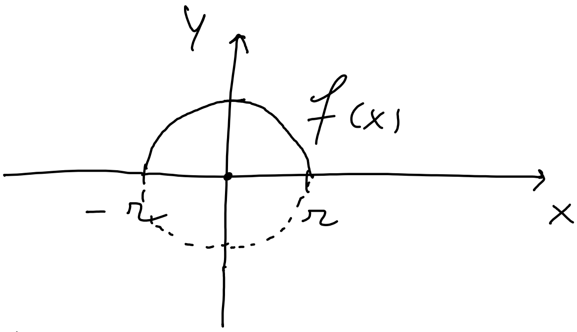
1) $f(x) = kx$ su $[0, h]$ (volume di un cono)



$$V = \pi \int_0^h k^2 x^2 \, dx = \pi k^2 \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^h = \pi k^2 \frac{h^3}{3}$$

che è infatti il volume di un cono di altezza h e raggio di base $r = kh$ $\left(V = \frac{1}{3} \pi r^2 h = \frac{1}{3} \pi k^2 h^2 h = \frac{1}{3} \pi k^2 h^3 \right)$.

2) Volume della sfera di raggio r



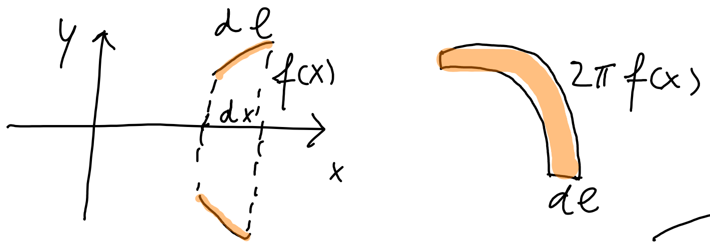
L'equazione della circonferenza è:

$x^2 + y^2 = r^2$, da cui $y^2 = f^2(x) = r^2 - x^2$,

$$V = \pi \int_{-r}^{r} (r^2 - x^2) \, dx = \pi \left[r^2 x - \frac{x^3}{3} \right]_{-r}^{r} = \frac{4}{3} \pi r^3$$

Superficie laterale di un solido di rotazione

La superficie laterale si può ottenere sommando le superfici laterali di segmenti conici di larghezza dl e raggio f(x):



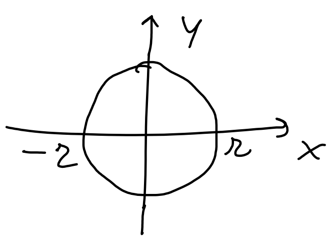
$$dS = 2\pi f(x)\cdot \overbrace{\sqrt{1+f'(x)^2}\,dx}^{dl}$$

Integrando si ottiene la superficie laterale del solido di rotazione:

$$S = \int dS = 2\pi \int_a^b f(x)\cdot\sqrt{1+f'(x)^2}\,dx$$

Esempio

Superficie della sfera di raggio r



$$y = f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$$

$$f'(x) = -\frac{2x}{2\sqrt{r^2-x^2}} = -\frac{x}{\sqrt{r^2-x^2}}$$

$$S = 2\pi \int_{-r}^{r} \sqrt{r^2-x^2}\cdot\sqrt{1+\frac{x^2}{r^2-x^2}}\,dx =$$

$$= 2\pi \int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2} \cdot \frac{r}{\sqrt{r^2 - x^2}} \, dx =$$

$$= 2\pi \int_{-r}^{r} r \, dx = 2\pi r \left[x \right]_{-r}^{r} = 4\pi r^2$$