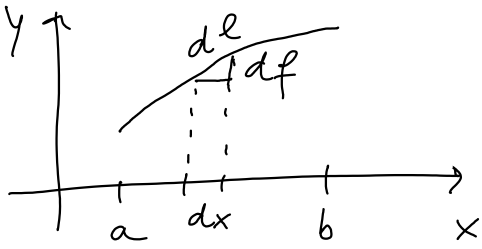
Lunghezza di una curva

Data una funzione $y = f(x)$, si può calcolare la lunghezza della sua curva rappresentativa, tra due estremi a e b sull'asse x, sommando gli elementi infinitesimi di lunghezza $d\ell$:



$$d\ell = \sqrt{dx^2 + df^2} =$$

$$= \sqrt{dx^2 + f'^2_{(x)}\, dx^2} =$$

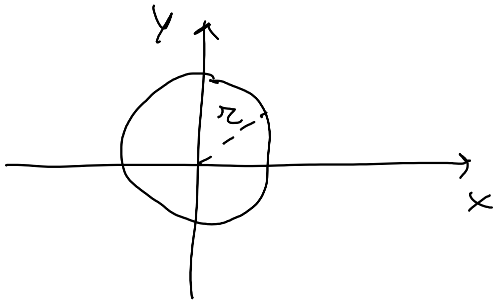
$$= \sqrt{1 + f'^2_{(x)}}\; dx$$

Integrando si ottiene la lunghezza della curva:

$$\ell = \int d\ell = \int_a^b \sqrt{1 + f'^2_{(x)}}\; dx$$

Esempio

Lunghezza della circonferenza di raggio r.



$$x^2 + y^2 = r^2$$

$$y = f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$$

$$f'(x) = -\frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{r^2-x^2}} = -\frac{x}{\sqrt{r^2-x^2}}$$

$$\ell = 2\int_{-r}^{r} \sqrt{1+f'^2(x)}\, dx = 2\int_{-r}^{r} \sqrt{1+\frac{x^2}{r^2-x^2}}\, dx =$$

$$= 2\int_{-r}^{r} \sqrt{\frac{r^2}{r^2-x^2}}\, dx = 2r\int_{-r}^{r} \frac{1}{\sqrt{r^2-x^2}}\, dx =$$

$$= 2\cancel{r}\int_{-r}^{r} \frac{1}{\cancel{r}\sqrt{1-\left(\frac{x}{r}\right)^2}}\, dx =$$

(con la sostituzione $\frac{x}{r} = t$, $x = rt$, $dx = r\,dt$, per $x = -r \to t = -1$, per $x = r \to t = 1$)

$$= 2\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \cdot r\, dt = 2r\left[\arcsin t\right]_{-1}^{1} =$$

$$= 2r\left(\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) = 2\pi r$$