Il teorema di Lagrange

Si tratta di una generalizzazione del teorema di Rolle.

Teorema

Se una funzione, definita nell'intervallo $[a,b]$ risulta:

a) continua in $[a,b]$

b) derivabile in $]a,b[$

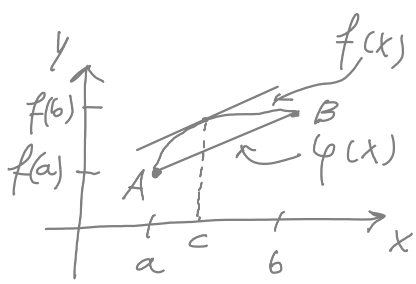
allora esiste almeno un punto $c \in]a,b[$ tale che
$$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

Dimostrazione

Si basa sul teorema di Rolle.

Consideriamo la funzione

$$\varphi(x) = f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$$



(la retta che congiunge i punti A e B).

Osserviamo che la funzione

$\phi(x) = f(x) - \varphi(x)$ verifica le condizioni del teorema di Rolle, infatti:

$f(x)$ è continua e derivabile quindi anche $\phi(x)$ lo è, inoltre

$$\phi(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

e, di conseguenza, $\phi(a) = \phi(b) = 0$.

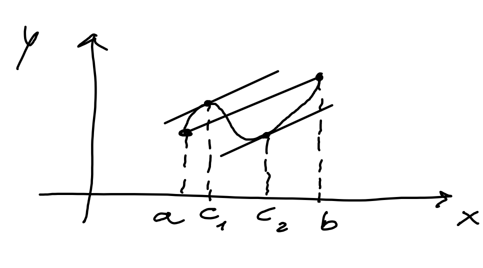
Quindi esiste almeno un punto $c \in]a, b[$ tale che $\phi'(c) = 0$, cioè:

$$\phi'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0$$

da cui $$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Il significato geometrico del teorema di Lagrange è che esiste almeno un punto in cui la tangente alla curva ha la stessa pendenza del segmento che congiunge i punti A e B alle estremità della curva (la funzione $\varphi(x)$).

Come nel caso del teorema di Rolle possono esistere più punti in cui la derivata si annulla:

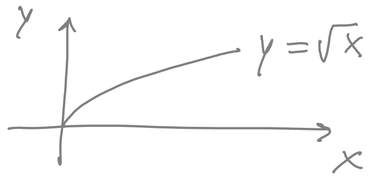


Esercizi

stabilisci se le seguenti funzioni verificano le ipotesi del teorema di Lagrange.

1) $f(x) = \sqrt{x}$ in $[0, 4]$

Come risulta evidente dal grafico



la funzione è continua in $[0,4]$ e derivabile in $]0, 4[$ (non è derivabile nel punto $x=0$ perchè la tangente in quel punto è l'asse y).

Deve esistere almeno un punto c tale che $f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$, cioè

$$\frac{1}{2\sqrt{c}} = \frac{\sqrt{4} - \sqrt{0}}{4 - 0}, \quad \frac{1}{2\sqrt{c}} = \frac{2}{4}, \quad c = 1$$

Il punto $c = 1$ appartiene in effetti all'intervallo $]0, 4[$.

2) $f(x) = e^x$ in $[1, 2]$

La funzione è continua e derivabile in tutto $\mathbb{R}$. $f'(c) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$, $e^c = \dfrac{e^2 - e^1}{2-1}$

$$c = \ln e(e-1) = \ln e + \ln(e-1) = \ln(e-1) + 1 \simeq 1{,}54$$