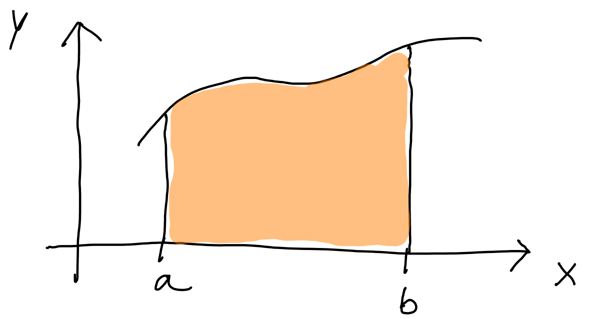
Il calcolo integrale

La nozione di derivata risolve il problema della determinazione della tangente ad una curva.

L'altro problema fondamentale del calcolo infinitesimale è quello delle aree.

Data una funzione $f(x)$, quanto vale l'area della regione sottesa alla curva di equazione $y=f(x)$ nell'intervallo $[a,b]$?



Newton e Leibniz hanno scoperto che che questo problema è strettamente legato al problema delle tangenti ed alla nozione di derivata.

Per questo sono considerati i fondatori del calcolo infinitesimale

L'integrale definito

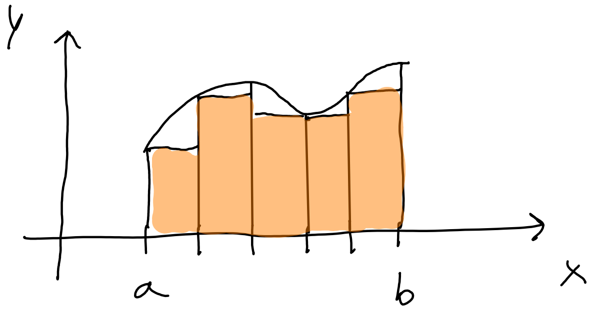
Data una funzione $f(x)$ considerata su un intervallo $[a, b]$, si chiama integrale definito della funzione $f(x)$ sull'intervallo $[a, b]$, e si indica con il simbolo

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

l'area sottesa alla curva che rappresenta la funzione $y = f(x)$, sull'intervallo $[a, b]$.

Quest'area può essere espressa sotto forma di limite.

Suddividendo l'intervallo $[a, b]$ in tanti sottointervalli (vedi file Geogebra) e considerando il valore della funzione in un punto degli intervalli, si può sostituire la superficie studiata con un plurirettangolo.



L'area del plurirettangolo vale:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f(x_k) \cdot \Delta x_k$$

dove n è il numero di sottointervalli in cui è stato suddiviso l'intervallo $[a, b]$ e Δx_k è l'ampiezza di questi intervalli.

Se gli intervalli sono uguali allora:

$$\Delta x_k = \frac{b-a}{n}$$

L'area del plurirettangolo non è uguale esattamente all'area sotto la curva, ma lo diventa se si fa tendere a infinito il numero di suddivisioni dell'intervallo $[a, b]$ (e quindi si fa tendere a zero Δx_k).

Si ha quindi la seguente definizione di integrale definito:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\substack{\Delta x_k \to 0 \\ n \to \infty}} \sum_{1}^{n} {}_k\, f(x_k)\cdot \Delta x_k$$

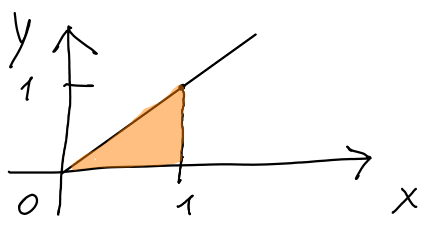
Il calcolo diretto degli integrali definiti non è semplice perché occorre calcolare limiti piuttosto difficili anche nel caso di funzioni elementari.

Esempio di calcolo diretto

Consideriamo il caso molto semplice della funzione $f(x) = x$ sull'intervallo $[0, 1]$.

L'integrale in questo caso vale chiaramente $1/2$ (è l'area sotto la retta)

$$\int_0^1 x \, dx = \frac{1}{2}$$



Applicando la definizione di integrale e scegliendo per gli x_k il punto a destra di ogni intervallo, si ottiene:

$$\int_0^1 x\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\cdot \Delta x_k =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n}\cdot\frac{1}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^{\cancel{2}}}\cdot\frac{\cancel{n}(n+1)}{2} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{2n} = \frac{1}{2}$$

Come si vede, anche in un caso così semplice i calcoli sono abbastanza difficili.

La scoperta, da parte di Newton e Leibniz, del teorema fondamentale del calcolo integrale permette però di calcolare le aree evitando le difficoltà del calcolo diretto basato sulla definizione. Per capire il teorema è necessario introdurre le nozioni di funzione integrale e di integrale indefinito.