Calcolo numerico

Metodi di soluzione approssimata delle equazioni

Metodo di bisezione

Data l'equazione $f(x)=0$, se $f(x)$ è continua, crescente o decrescente nell'intervallo $[a,b]$ e $f(a)\cdot f(b)<0$, allora deve annullarsi in un punto di $]a,b[$.

Per determinarlo si può ricorrere al seguente procedimento iterativo:

supponiamo che sia $f(a)>0$, $f(b)<0$ (nell'altro caso si ragiona comunque in modo simile)

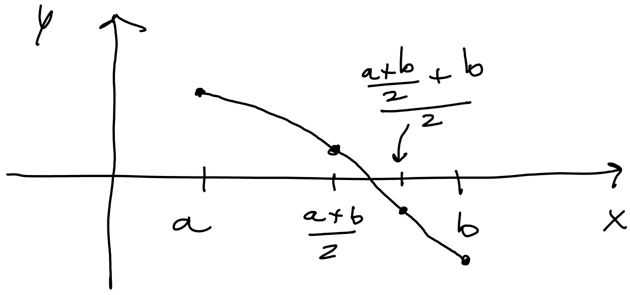
a) si calcola $f\left(\frac{a+b}{2}\right)$ e

se $f\left(\frac{a+b}{2}\right)>0$ si considera l'intervallo $\left[\frac{a+b}{2}, b\right]$

mentre se $f\left(\frac{a+b}{2}\right)<0$ si considera $\left[a, \frac{a+b}{2}\right]$

b) si ripete il procedimento stimando ogni volta l'errore, che risulta inferiore alla semiampiezza dell'intervallo.

c) quando l'intervallo ha ampiezza minore dell'errore prefissato il procedimento ha termine e la stima della soluzione è la media aritmetica degli estremi dell'ultimo intervallo.



intervalli:

$[a, b]$

$\left[\frac{a+b}{2}, b\right]$

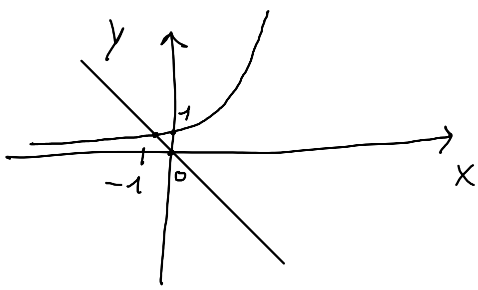
$\left[\frac{a+b}{2}, \frac{\frac{a+b}{2}+b}{2}\right]$

ecc...

Esempio

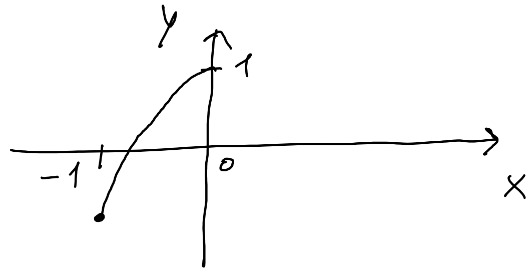
Risolvere in modo approssimato l'equazione $e^x + x = 0$.

Questa equazione equivale alla $e^x = -x$ e graficamente si vede che ha una soluzione compresa tra -1 e 0, infatti $e^{-1} = \frac{1}{e} < 1$.



La funzione $f(x) = e^x + x$ è continua, positiva in $x = 0$, negativa in $x = -1$ e crescente nell'intervallo $[-1, 0]$, infatti la sua derivata prima $f'(x) = e^x + 1$ è positiva.

Il grafico della funzione deve quindi incontrare l'asse x in un punto solo.



Applicando il metodo di bisezione:

a	b	$f(a)$	$f(b)$	$\frac{a+b}{2}$	$f\left(\frac{a+b}{2}\right)$
-1	0	$-0{,}63212$	1	$-0{,}5$	$0{,}10653$
-1	$-0{,}5$	$-0{,}63212$	$0{,}10653$	$-0{,}75$	$-0{,}27763$
$-0{,}75$	$-0{,}5$	$-0{,}27763$	$0{,}10653$	$-0{,}625$	$-0{,}089738$
$-0{,}625$	$-0{,}5$	$-0{,}089738$	$0{,}10653$	$-0{,}5625$	$0{,}0072828$
$-0{,}625$	$-0{,}5625$	$-0{,}089738$	$0{,}0072828$	$-0{,}59375$	$-0{,}041497$
$-0{,}59375$	$-0{,}5625$	$-0{,}041497$	$0{,}0072828$	$-0{,}57812$	$-0{,}017176$
$-0{,}57812$	$-0{,}5625$	$-0{,}017176$	$0{,}0072828$	$-0{,}57031$	$-0{,}0049598$

Errore = semidifferenza (2ª cifra)

Soluzione approssimata

Si tratta di un metodo a convergenza piuttosto lenta: dopo n passi di iterazione l'errore è $\frac{b-a}{2^n}$. Per esempio per avere una precisione di $0{,}001$ servono $\left(\frac{1}{2^n} = \frac{1}{1000},\ n = \log_2 1000 \simeq 10\right)$ 10 passi di iterazione.