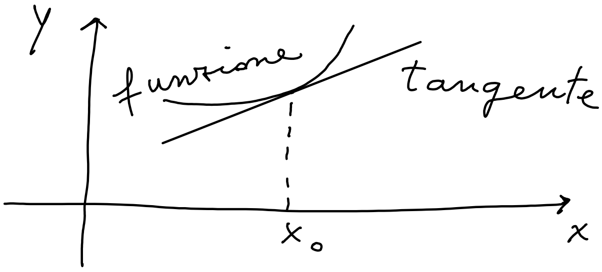
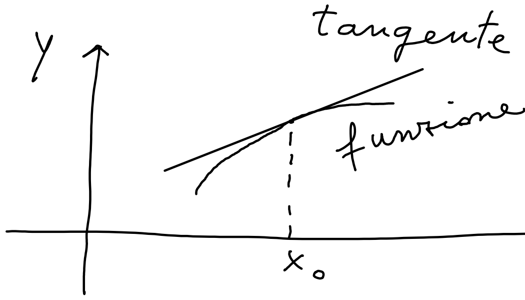
Concavità e punti di flesso

Definizioni

- Una funzione si dice concava verso l'alto in un punto x_0 se esiste un intorno di x_0 in cui il grafico della funzione si trova al di sopra della retta tangente in quel punto.



- Una funzione si dice concava verso il basso in un punto x_0 se esiste un intorno di x_0 in cui il grafico della funzione si trova al di sotto della retta tangente in quel punto.



- Si dice che una funzione ha un punto di flesso in x_0 se

1) esiste la tangente alla curva

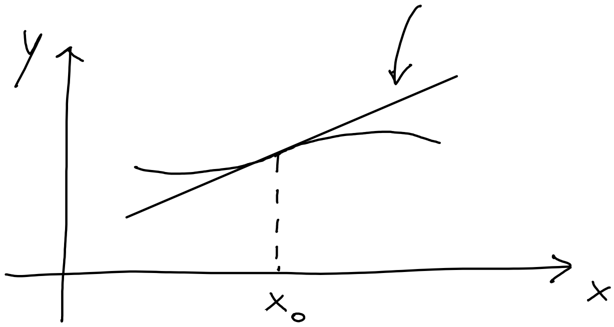
che rappresenta la funzione nel punto x_0 (2)

2) esiste un intorno di x_0 tale che la curva si trovi da parti opposte rispetto alla tangente in x_0 per i punti che appartengono all'intorno destro e all'intorno sinistro

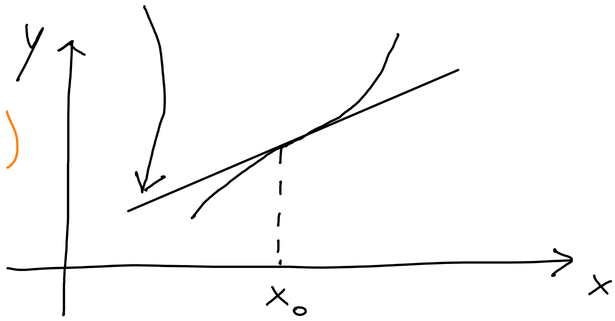
Si ha quindi un punto di flesso in x_0 se in quel punto cambia la concavità della funzione.

tangente inflessionale

(a)



(b)



Nel caso in cui la funzione passi da sopra a sotto la tangente si parla di flesso discendente (caso a).

Se invece la funzione passa da sotto a sopra la tangente si parla di flesso ascendente (caso b).

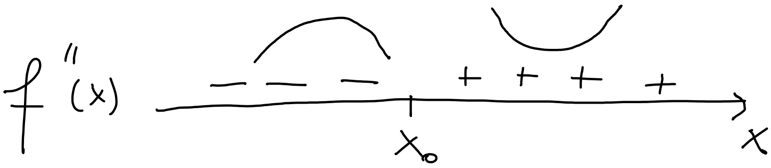
Negli intervalli in cui la funzione è concava verso l'alto la derivata prima è crescente e la derivata seconda è positiva.

Negli intervalli in cui la funzione è concava verso il basso la derivata prima è decrescente e la derivata seconda risulta negativa.

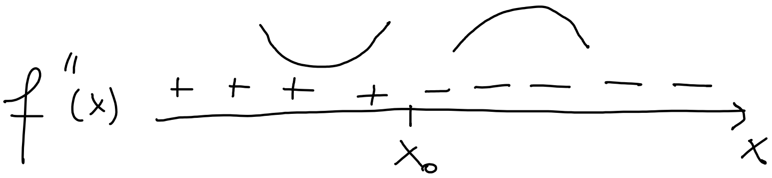
Nei punti x_0 di flesso si ha quindi $f''(x_0) = 0$.

Per stabilire se si tratta di un flesso ascendente o discendente si può studiare il segno della derivata seconda in un intorno del punto x_0, oppure calcolare la derivata terza $f'''(x_0)$.

Se a sinistra di x_0 (in cui $f''(x_0) = 0$) la derivata seconda è negativa e a destra di x_0 è positiva si ha un flesso ascendente (e $f'''(x_0) > 0$).



Se a sinistra di x_0 (in cui $f''(x_0) = 0$) la derivata seconda è positiva e a destra di x_0 è negativa si ha un flesso discendente (e $f'''(x_0) < 0$).



Esempi

Determina gli eventuali punti di flesso delle seguenti funzioni:

1) $y = x^3 - 2x$

$y' = 3x^2 - 2$, $y'' = 6x$, $y''' = 6$

La derivata seconda si annulla per $x=0$.
La derivata terza è positiva, quindi $x=0$ è un punto di flesso ascendente: $F(0,0)$.

2) $y = x + \frac{1}{2x}$

$y' = 1 - \frac{1}{2x^2}$, $y'' = \frac{1}{x^3}$, $y^3 = -\frac{3}{x^4}$

La derivata seconda non si annulla per nessun valore di x, quindi la funzione non ha punti di flesso.

3) $y = x \ln x$

$y' = \ln x + 1$, $y'' = \frac{1}{x}$, $y''' = -\frac{1}{x^2}$

La derivata seconda non ha zeri quindi la funzione non ha punti di flesso.

4) $y = \sin x$ in $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi\right]$

$y' = \cos x$, $y'' = -\sin x$, $y''' = -\cos x$

$y'' = 0$ se $-\sin x = 0$, cioè se $x = 0$ e $x = \pi$.

Nel primo punto $y'''(0) = -1$, nel secondo punto $y'''(\pi) = 1$.

La funzione ha quindi due flessi:

- flesso discendente per $x = 0$, $F_1(0, 0)$
- flesso ascendente per $x = \pi$, $F_2(\pi, 0)$