Conseguenze del teorema di Lagrange

Teorema sulle funzioni crescenti e decrescenti

Sia $f(x)$ una funzione continua nell'intervallo $[a, b]$ e derivabile in $]a, b[$.

Se $f'(x) > 0$ in ogni punto di $]a, b[$ allora la funzione è strettamente crescente in $[a, b]$;

Se $f'(x) < 0$ in ogni punto di $]a, b[$ allora la funzione è strettamente decrescente in $[a, b]$.

Si dimostra con il teorema di Lagrange:

dati due punti $x_1, x_2 \in [a, b]$ con $x_1 < x_2$ deve esistere un punto c tale che $f'(c) = \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$.

Se $f'(c) > 0$ si ha quindi $f(x_2) > f(x_1)$.

Ciò significa che la funzione è crescente in tutto $[a, b]$.

Se $f'(c) < 0$ risulta $f(x_2) < f(x_1)$ se $x_2 > 1$, quindi la funzione è decrescente in $[a, b]$.

Si tratta di una condizione sufficiente, ma non necessaria, infatti esistono funzioni crescenti che hanno punti a derivata nulla (per esempio la funzione $f(x) = x^3$ che in $x = 0$ ha derivata nulla, ma è crescente in $\mathbb{R}$).

Per stabilire se una funzione è crescente o decrescente occorre studiare il segno della derivata prima.

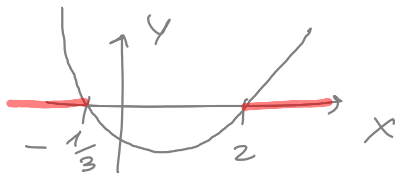
Esempi

1) $y = 2x^3 - 5x^2 - 4x + 2$

Studio il segno della derivata prima:

$y' = 6x^2 - 10x - 4$ che risulta positiva se

$3x^2 - 5x - 2 > 0$,

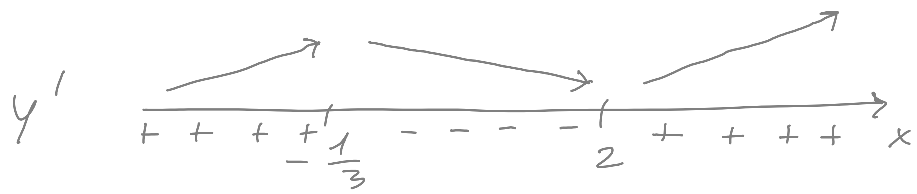


$$\left(\begin{array}{l} 3x^2 - 5x - 2 = 0 \\ x = \dfrac{5 \pm \sqrt{25 + 24}}{6} = \dfrac{5 \pm 7}{6} = \left\langle \begin{array}{l} 2 \\ -\frac{1}{3} \end{array} \right. \end{array} \right)$$

La derivata è positiva per $x < -\frac{1}{3}$ e $x > 2$

In questo insieme numerico la funzione risulta crescente mentre è decrescente nell'intervallo $[-\frac{1}{3}, 2]$ in cui la derivata è negativa.

Questa situazione si può rappresentare anche con un diagramma:



2) $y = \dfrac{2x-1}{x-3}$

Studio il segno della derivata prima:

$$y' = \frac{2(x-3)-(2x-1)}{(x-3)^2} = \frac{\cancel{2x}-6-\cancel{2x}+1}{(x-3)^2} = -\frac{5}{(x-3)^2}$$

La derivata, nel suo dominio, cioè nell'insieme $\mathbb{R}-\{3\}$, è negativa, quindi la funzione è decrescente per $x \neq 3$.

Teorema sulle funzioni costanti

Se una funzione $f(x)$, definita in $[a,b]$, è continua in $[a,b]$ e derivabile in $]a,b[$ e $f'(x)=0$, $\forall x \in]a,b[$, allora la funzione è costante in tutto l'intervallo $[a,b]$.

Si dimostra sempre con il teorema di Lagrange:
preso un punto qualsiasi $x \in [a,b]$, deve esistere un punto $c \in]a,x[$ tale che

$$f'(c) = \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = 0$$

da cui $f(x)-f(a)=0$ e $f(x)=f(a)$, $\forall x \in [a,b]$.

Da questo teorema si deduce poi un secondo teorema:

Teorema sulle funzioni con uguale derivata

Se due funzioni $f(x)$ e $g(x)$, continue in $[a,b]$ e derivabili in $]a,b[$, hanno la stessa derivata in $]a,b[$, allora differiscono per una costante: $f(x) - g(x) = k$.

Infatti se $f'(x) = g'(x)$, la funzione differenza $\phi(x) = f(x) - g(x)$ ha derivata nulla, $\phi'(x) = f'(x) - g'(x) = 0$ e, per il teorema precedente, è costante:

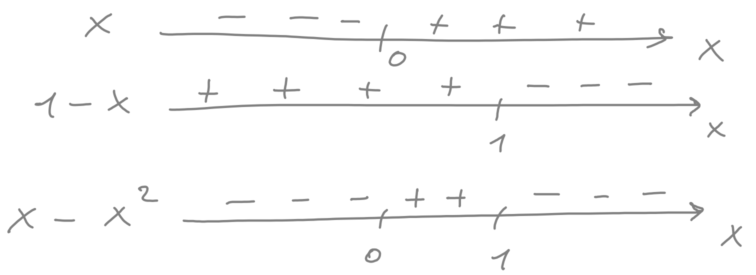
$$\phi(x) = f(x) - g(x) = k .$$

Esercizi

Studia l'andamento delle seguenti funzioni:

1) $y = \sqrt{x - x^2}$

La funzione è definita per $x - x^2 \geq 0$, $x(1-x) \geq 0$



quindi per $0 \leq x \leq 1$

Studio il segno della derivata prima:

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{x - x^2}} \cdot (1 - 2x) > 0 \quad \text{per} \quad 1 - 2x > 0 .$$

La funzione è quindi crescente per $0 < x \leq \frac{1}{2}$ e decrescente per $\frac{1}{2} < x < 1$.

2) $y = \sin x - \tan x$ in $[0, 2\pi]$.

La funzione non è definita per $x = \frac{\pi}{2}$ e $x = \frac{3}{2}\pi$.

La derivata è: $y' = \cos x - \frac{1}{\cos^2 x} = \frac{\cos^3 x - 1}{\cos^2 x}$

$$y' = \frac{\overset{<0}{(\cos x - 1)}\overset{>0}{(\cos^2 x + \cos x + 1)}}{\underset{>0}{\cos^2 x}}$$

tutti i fattori presenti hanno segno costante

e la derivata prima è negativa $\forall x \in [0, 2\pi]$ (eccettuati i punti $x = \frac{\pi}{2}$ e $x = \frac{3}{2}\pi$ in cui la funzione non è definita).

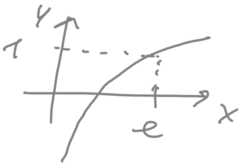
La funzione è quindi decrescente in tutti i punti dell'insieme detto.

3) $y = x \ln x$

Il dominio è $D = \{x > 0\}$

$y' = \ln x + x \cdot \frac{1}{x} = \ln x + 1$

$y' > 0$ per $\ln x > 1$



cioè per $x > e$.

La funzione è crescente per $x > e$ mentre è decrescente per $0 < x < e$.