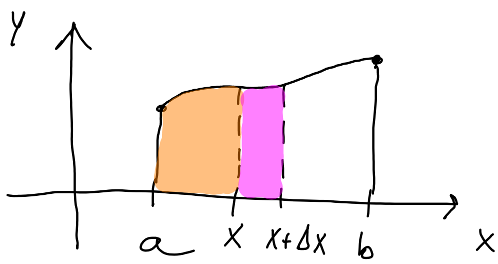
L'integrale indefinito

La funzione integrale

Consideriamo la funzione $F(x)$ che rappresenta l'area delimitata dalla funzione $f(x)$ sull'intervallo $[a, x]$:



Quest'area è l'integrale definito

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

ed è chiamata funzione integrale della funzione $f(x)$.

Il cambiamento della variabile di integrazione (t invece di x) è dovuto solo alla necessità di non confondere la variabile di integrazione (t) con l'estremo superiore di integrazione (x).

Proprietà della funzione integrale

Calcoliamo la derivata rispetto a x della funzione integrale:

$$\frac{d}{dx} F(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x+\Delta x) - F(x)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(\bar{x})\,\Delta x}{\Delta x} = f(x)$$ (vedi figura precedente)

dove $f(\bar{x})$ rappresenta il valore della funzione $f(x)$ in un opportuno punto $\bar{x}$ dell'intervallo $[x, x+\Delta x]$.

Quando $\Delta x \to 0$ si ha che $\bar{x} \to x$.

La derivata in x della funzione integrale $F(x)$ è dunque il valore della funzione $f(x)$:

$$F'(x) = f(x)$$

Questa proprietà fondamentale della funzione integrale fornisce un nuovo modo di calcolare le aree.

Primitive di una funzione

Data una funzione $f(x)$ chiamiamo funzione primitiva della funzione $f(x)$ qualunque funzione $\phi(x)$ tale che $\phi'(x) = f(x)$.

Per esempio $\phi(x) = x^2$ è una primitiva di $f(x) = 2x$ perché $\phi'(x) = f(x)$.

Anche $\phi(x) = x^2+1$ è una primitiva di $f(x) = 2x$, infatti si ha, anche in questo caso, $D(x^2+1) = \phi'(x) = 2x = f(x)$.

In generale le primitive di una funzione sono infinite e differiscono tra loro per una costante additiva.

Integrali indefiniti

L'insieme di tutte le primitive di una funzione $f(x)$ è chiamato integrale indefinito della funzione $f(x)$ e si indica con il simbolo:

$$\int f(x)\,dx$$ (senza gli estremi di integrazione)

Il problema della determinazione dell'integrale indefinito di una funzione è più semplice del problema delle aree, ma consente di risolverlo, infatti, considerando di nuovo la funzione integrale:

$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$, questa è una primitiva di $f(x)$ (quella che si annulla per $x=a$, infatti $F(a)=0$).