Metodo delle secanti

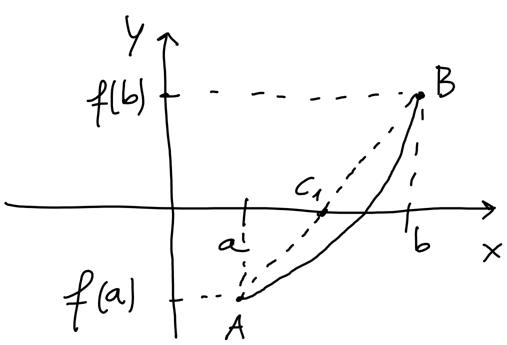
Il metodo delle secanti è un altro metodo per risolvere numericamente un'equazione del tipo $f(x)=0$.

Il metodo si può applicare se $f(x)$ è:

1) continua e 2 volte derivabile in $[a,b]$
2) $f(a)\cdot f(b)<0$
3) $f''(x) \gtrless 0$ in $[a,b]$ (sempre positiva o negativa)

In tal caso il segmento per gli estremi è secante in un punto $c_1 \in]a,b[$.

Se per esempio $f(a)<0$, $f(b)>0$ e $f''(x)>0$ (concavità verso l'alto), allora $c_1 < x_0$ (dove x_0 è lo zero cercato, tale cioè che $f(x_0)=0$)



I punti A e B hanno coordinate

$A(a, f(a))$, $B(b, f(b))$.

La pendenza del segmento secante è

$m = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$ e la retta passante per

gli estremi della curva avrà equazione

$$y - f(a) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \cdot (x - a)$$

Questa retta incontra l'asse x in c_1 (per $y=0$)

$$-f(a) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} (c_1 - a), \text{ da cui:}$$

$$c_1 - a = -f(a) \cdot \frac{b - a}{f(b) - f(a)}$$

infine: $$c_1 = a - \frac{f(a)(b-a)}{f(b) - f(a)}$$

oppure: $$c_1 = \frac{f(b) \cdot a - f(a)\, b}{f(b) - f(a)}$$

Iterando queste formule, per esempio la seconda, si ottiene una formula ricorsiva per l'approssimazione di x_0. Alla seconda iterazione si ha: $c_2 = \dfrac{c_1 f(b) - b f(c_1)}{f(b) - f(c_1)}$

e, in generale, all'n-esima iterazione:

$$c_{n+1} = \frac{c_n f(b) - b f(c_n)}{f(b) - f(c_n)}$$

Nel caso, per esempio, dell'equazione $e^x + x = 0$ sull'intervallo $[-1, 0]$, si ha:

$f'(x) = e^x + 1$, $f''(x) = e^x > 0$, $f(-1) < 0$, $f(0) > 0$

Si può quindi utilizzare il metodo delle secanti con la formula vista:

n	c_n $(c_0 = a)$	b	$f(c_n)$	$f(b)$	c_{n+1}
0	-1	0	$-0,63212$	1	$-0,61270$
1	$-0,61270$	0	$-0,070813$	1	$-0,57218$
2	---	0	---	1	---
-	---	...	---	---	---