Monete e probabilità

La probabilità che lanciando una moneta esca testa (o croce) è $1/2 = 0{,}5 = 50\%$.

Lanciando monete per un numero sempre maggiore di volte si ottengono frequenze relative sempre più prossime al valore della probabilità classica.

Questo fatto si può verificare più rapidamente con una simulazione al computer:

n° di lanci	n° di risultati "testa"	percentuale di risultati "testa"
10	4	$0{,}4 = 40\%$
100	57	$0{,}57 = 57\%$
1 000	513	$0{,}513 \simeq 51\%$
10 000	4 901	$0{,}4901 \simeq 49\%$
100 000	50085	$0{,}50085 \simeq 50\%$
1 000 000	499716	$0{,}499716 \simeq 50\%$

La probabilità di ottenere esattamente metà delle volte testa non è molto elevata e diminuisce all'aumentare del numero di lanci, per esempio, quanto vale la probabilità di ottenere 2 volte testa su 4 lanci?

Le uscite possibili sono le 16 seguenti

TTTT, TTTC, TTCT, TCTT, CTTT,
TTCC, TCTC, CTTC, TCCT, CTCT,
CCTT, TCCC, CTCC, CCTC, CCCT,
CCCC

di queste sono 6 quelle in cui si ottiene 2 volte testa.

La probabilità è quindi $p = \frac{6}{16} \simeq 38\%$.

Se il numero di lanci è maggiore occorre calcolare il numero di sequenze possibili con il calcolo combinatorio.

Le sequenze su n lanci sono

una in cui esce sempre testa,

n in cui esce 1 sola croce,

$\binom{n}{2} = \frac{n!}{2!(n-2)!}$ in cui escono 2 croci, e così via fino a

$$\binom{n}{n-1} = \frac{n!}{(n-1)!} = n$$ in cui escono $n-1$ croci,

ed $$\binom{n}{n} = \frac{n!}{n!} = 1$$ in cui escono n croci.

Le quantità $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$ sono dette

coefficienti binomiali n su k che danno

il numero di combinazioni di n elementi

a k a k, cioè il numero di modi di

scegliere k elementi in un insieme di n,

senza considerare l'ordine di scelta.

Il numero totale di sequenze è quindi:

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \binom{n}{3} + \cdots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n} = (1+1)^n = 2^n$$

[dalla formula per lo sviluppo del binomio di Newton:

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \cdots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}b^n$$]

Le sequenze con k croci sono $\binom{n}{k}$ quindi

la probabilità che escano k croci su n lanci è data da: $P = \dfrac{\binom{n}{k}}{2^n}$

Nel caso, già visto, di 2 croci su 4 lanci si riottiene infatti il risultato già trovato:

$$P = \frac{\binom{4}{2}}{2^4} = \frac{\frac{4!}{2!\,(4-2)!}}{2^4} = \frac{\frac{\cancel{4}^{2}\cdot 3\cdot \cancel{2\cdot 1}}{\cancel{2}\cdot 1\cdot \cancel{2\cdot 1}}}{16} = \frac{6}{16} \simeq 38\%$$

La probabilità di ottenere 10 croci su 20 lanci è invece

$$P = \frac{\binom{20}{10}}{2^{20}} = \frac{\frac{20!}{10!\,10!}}{2^{20}} = 0,176 \simeq 18\%$$

un po' meno di $1/5$.

Per 100 croci su 200 lanci: $P = \dfrac{\binom{200}{100}}{2^{200}} = 0,056 \simeq 6\%$

Vediamo perché il numero di combinazioni di n elementi a gruppi di k è $\binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!\,(n-k)!}$

Se dobbiamo scegliere k elementri tra n abbiamo n modi di scegliere il primo, $n-1$ modi di scegliere il secondo, $n-2$ modi di scegliere il terzo, ..., $n-k+1$ modi di scegliere il k-esimo elemento.

Alcuni di questi modi differiscono però solo per l'ordine in cui sono scelti i k oggetti (gli oggetti sono gli stessi).

Nel calcolo delle combinazioni non importa l'ordine in cui gli oggetti vengono scelti, quindi occorre dividere per il numero di modi di riordinare k oggetti.

Questo numero si chiama numero di permutazioni di k oggetti ed è pari a $k! = k(k-1)(k-2)\cdots 1$, infatti il primo oggetto si può sistemare in k modi, il secondo in $(k-1)$ modi, ..., l'ultimo in un solo modo.

Le combinazioni di n elementi a k a k sono dunque:

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\cdot(n-2)\cdots(n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

$$\left(\text{Infatti } \frac{n!}{(n-k)!} = n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1) \right)$$

Un semplice gioco

Due giocatori lanciano a turno una moneta. Il primo che ottiene testa vince.

Il primo a lanciare ha chiaramente un vantaggio.
Ma qual è la probabilità che vinca il gioco?

Può vincere se esce testa al 1° lancio ($p = \frac{1}{2}$),
oppure se esce croce nei primi due lanci e testa nel 3° $\left(p = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \left(\frac{1}{2}\right)^3\right)$, ecc...

La probabilità di vittoria per il primo giocatore è quindi:

$$p = \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \left(\frac{1}{2}\right)^5 + \dots = \frac{1}{2}\left(1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^4 + \dots\right)$$

Si tratta di una serie geometrica, di ragione $\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$, che ha per somma:

$$p = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} = \frac{2}{3}$$

L'altro giocatore ha probabilità di vincere: $p = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$