Dadi e probabilità

La probabilità di ottenere 1 lanciando un dado cubico a 6 facce è $\frac{1}{6}$, la stessa che si ha per tutti e 6 i numeri che compaiono sulle facce del dado.

Qual è il numero medio di lanci che è necessario effettuare per ottenere un 6?

Occorre calcolare la media pesata del numero di lanci con le relative probabilità:

La probabilità che esca 6 al primo lancio è $\frac{1}{6}$: $\qquad P_1 = \frac{1}{6}$

La probabilità che esca 6 al 2° lancio è

$P_2 = \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6}$ (cioè la probabilità che non esca 6 al primo lancio e che esca 6 al secondo lancio).

Si può notare che la somma di tutte queste probabilità è uguale a 1:

$$P_1 + P_2 + \ldots = \frac{1}{6} + \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6} + \left(\frac{5}{6}\right)^2 \cdot \frac{1}{6} + \cdots =$$

$$= \frac{1}{6} \cdot \left(1 + \frac{5}{6} + \left(\frac{5}{6}\right)^2 + \cdots\right) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{1-\frac{5}{6}} = 1$$

Il numero medio di lanci è quindi:

$$\bar{n} = 1 \cdot p_1 + 2 p_2 + 3 p_3 + \cdots + n p_n + \cdots =$$

$$= 1 \cdot \frac{1}{6} + 2\left(\frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6}\right) + 3\left(\frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6}\right) + \cdots$$

Si può dimostrare che questa serie ha per somma 6, quindi la maggior parte delle volte si ottiene 6 dopo sei lanci, anche se capita di ottenerlo al primo lancio o dopo un gran numero di lanci.

Lanciando 2 dadi si hanno 36 configurazioni possibili che forniscono i risultati possibili da 2 a 12.

Le probabilità sono le seguenti:

$p(2) = \frac{1}{36}$, $p(3) = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$, $p(4) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$

$p(5) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$, $p(6) = \frac{5}{36}$, $p(7) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$

$p(8) = \frac{5}{36}$, $p(9) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$, $p(10) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$

$p(11) = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$, $p(12) = \frac{1}{36}$

Anche in questo caso il numero medio di lanci per ottenere un doppio sei $\left(p = \frac{1}{36}\right)$ è proprio 36.

Alcuni giochi con i dadi

- Qual è la probabilità di ottenere almeno un 6 lanciando 4 volte un solo dado?

La probabilità di non ottenere alcun 6 è $p = \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} = \left(\frac{5}{6}\right)^4 \simeq 0{,}48$

La probabilità di ottenere almeno un 6 è la probabilità complementare:

$$p = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^4 \simeq 0{,}52$$

- Qual è la probabilità di ottenere un doppio 6 in 24 lanci di 2 dadi?

La probabilità di ottenere due 6 è $\frac{1}{36}$.

La probabilità di non ottenere un doppio 6 è $\frac{35}{36}$.

La probabilità di non ottenere un doppio 6 in 24 lanci è $\left(\frac{35}{36}\right)^{24} \simeq 0{,}51$.

La probabilità di ottenere un doppio 6 su 24 lanci è la probabilità complementare: $p = 1 - \left(\frac{35}{36}\right)^{24} \simeq 0{,}49$.

Dunque chi scommette alla pari sull'uscita di un 6 su 4 lanci di un dado alla lunga vince, mentre chi scommette sull'uscita di un doppio 6 su 24 lanci di due dadi alla lunga perde.

- Qual è la probabilità di ottenere almeno un 6 con il lancio di 6 dadi?

$$p = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^6 \simeq 0{,}67$$

- Qual è la probabilità di ottenere almeno due 6 con il lancio di 12 dadi?

La probabilità di non ottenere almeno due 6 è la somma delle probabilità di non ottenere alcun 6 e della probabilità di ottenere un solo 6:

$$p = \left(\frac{5}{6}\right)^{12} + \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{11} \cdot 12 \simeq 0{,}38$$

La probabilità di avere almeno due 6

è quindi:

$$p' = 1 - p \simeq 0{,}62$$

— Qual è la probabilità di ottenere almeno tre 6 con il lancio di 18 dadi?

$$P_0 = \left(\frac{5}{6}\right)^{18} \simeq 0{,}0376 \quad , \quad P_1 = \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{17} \cdot 18 \simeq 0{,}135$$

$$P_2 = \left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{16} \cdot \binom{18}{2} = \left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{16} \cdot \frac{18!}{2!\,16!} \simeq 0{,}230$$

$$P = P_0 + P_1 + P_2 \simeq 0{,}40$$

$$P' = 1 - P = 0{,}60$$