Studi di funzione

1) $$f(x) = \frac{x^2 - 2x - 1}{x^2}$$

La funzione è definita in $\mathbb{R} - \{0\}$, non ha simmetrie (infatti

$$f(-x) = \frac{x^2 - 2x - 1}{x^2}$$ che è diversa sia

da $f(x)$ sia da $-f(x)$) ed è positiva per $x^2 - 2x - 1 > 0$, cioè per valori esterni all'intervallo $(1-\sqrt{2}, 1+\sqrt{2}) \simeq (-0{,}4, 2{,}4)$.

Incontra l'asse x nei punti $(1-\sqrt{2}, 0)$ e $(1+\sqrt{2}, 0)$.

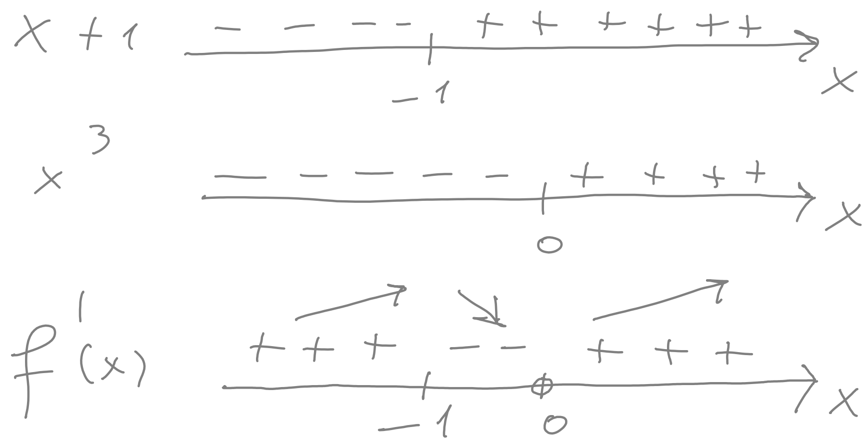
L'asse y è un asintoto verticale per la funzione, infatti $\lim_{x \to 0} f(x) = \infty$.

La funzione ha anche un asintoto orizzontale di equazione $y = 1$, infatti $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = 1$.

Calcolando la derivata si ottiene:

$$f'(x) = \frac{(2x-2)\,x^{\cancel{2}} - 2\cancel{x}(x^2 - 2x - 1)}{x^{\cancel{4}3}} =$$

$$= \frac{\cancel{2x^2} - 2x - \cancel{2x^2} + 4x + 2}{x^3} = \frac{2x+2}{x^3} = 2\,\frac{x+1}{x^3}$$



La derivata prima si annulla per $x = -1$ ed è positiva per $x < -1$ e $x > 0$, negativa per $-1 < x < 0$.

Nel punto di ascissa $x = -1$ la funzione ha quindi un massimo relativo: $M = (-1, 2)$.

Derivando ancora:

$$f''(x) = \frac{2\cancel{x^3}^{\,x} - 2(x+1)\cdot 3\cancel{x^2}}{x^{\cancel{6}\,4}} =$$

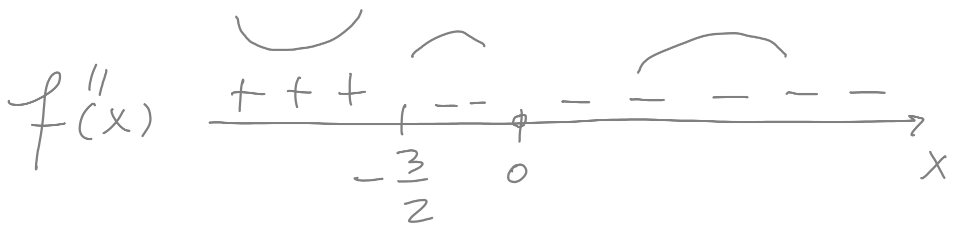
$$= \frac{2x - 6x - 6}{x^4} = \frac{-4x - 6}{x^4}$$

La derivata seconda è positiva se

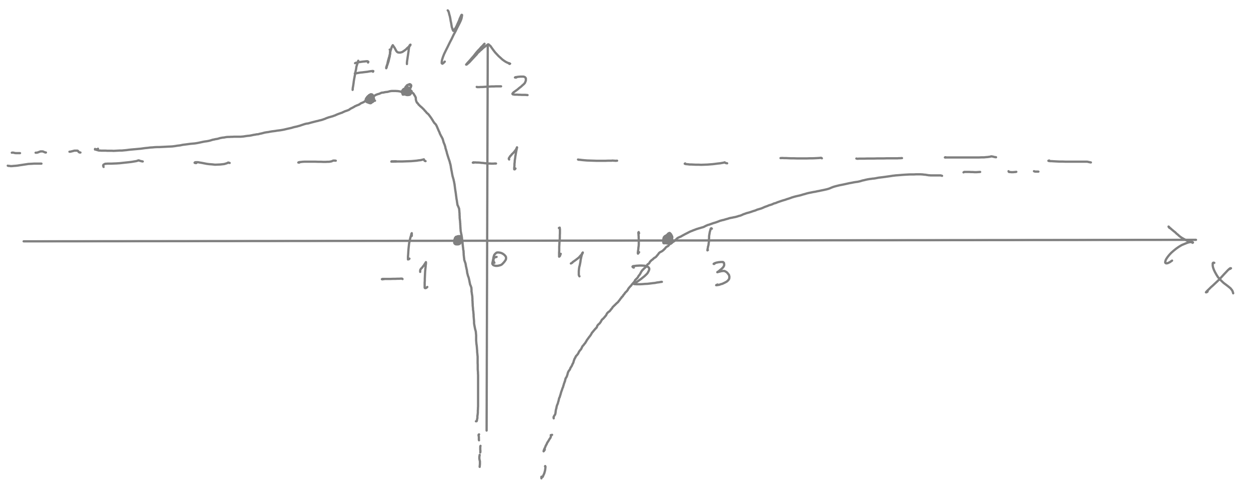
$-4x - 6 > 0, \quad x < -\frac{3}{2}$.

La funzione è quindi concava verso

l'alto per $x < -\frac{3}{2}$ e concava verso il basso nel resto del dominio:



Per $x = -\frac{3}{2}$ si ha quindi un punto di flesso discendente: $F\left(-\frac{3}{2}, \frac{17}{9}\right)$



2) $$f(x) = x^2 \ln x$$

E' definita per x positivi (a causa della presenza del logaritmo). Quindi $D =]0, +\infty[$.

E' positiva per $x > 1$ e negativa per $0 < x < 1$ (si annulla per $x = 1$), infatti x^2 è positiva nel dominio e $\ln x \geq 0$ per $x > 1$.
La funzione non ha simmetrie, infatti

non si può nemmeno calcolare $f(-x)$.

L'asse y non è un asintoto verticale, infatti

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{2x}{x^4}} = 0$$

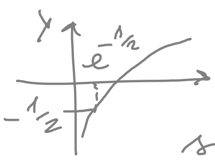
Non ci sono nemmeno asintoti orizzontali o obliqui, infatti

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty \quad e \quad \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \infty$$

$$f'(x) = 2x\ln x + x^2 \cdot \frac{1}{x} = 2x\ln x + x = x\,(2\ln x + 1)$$

la derivata prima si annulla per $x=0$ e per $2\ln x + 1 = 0$, cioè $\ln x = -\frac{1}{2}$, $x = e^{-\frac{1}{2}}$, ciò significa che la funzione (che non è definita in $x=0$) tende ad essere tangente all'asse x per $x \to 0^+$.

In $x = e^{-\frac{1}{2}}$ invece la funzione ha un minimo, infatti, studiando il segno della derivata prima si trova che è positiva per $x > e^{-1/2}$ e negativa per $0 < x < e^{-1/2}$ (infatti $2\ln x + 1 > 0$ per $\ln x > -\frac{1}{2}$



da cui $x > e^{-1/2}$, come si può vedere dal grafico).

Il valore della funzione nel punto di minimo è $f(e^{-1/2}) = \left(e^{-\frac{1}{2}}\right)^2 \cdot \ln e^{-1/2} = e^{-1} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2e} \simeq -0{,}18$

$e^{-\frac{1}{2}} \simeq 0,6$

Dalla studio della derivata seconda:

$f''(x) = 2\ln x + 1 + x \cdot \frac{2}{x} = 2\ln x + 3$

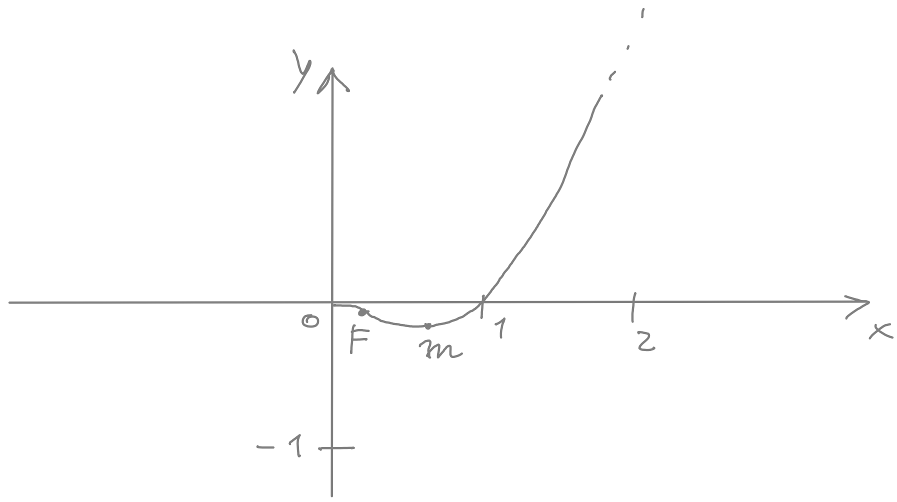
$f''(x) > 0$ per $2\ln x + 3 > 0$, $\ln x > -\frac{3}{2}$, $x > e^{-\frac{3}{2}}$

La funzione ha dunque concavità verso il basso per $0 < x < e^{-\frac{3}{2}}$ e concavità verso l'alto per $x > e^{-\frac{3}{2}}$. Si ha un flesso ascendente nel punto F di ascissa $e^{-3/2} \simeq 0,22$

$f(e^{-3/2}) = (e^{-3/2})^2 \cdot \ln e^{-3/2} = e^{-3} \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) \simeq -0,075$

$F\left(e^{-\frac{3}{2}}, -\frac{3}{2e^3}\right) \simeq F(0,22, -0,08)$

La funzione ha il seguente grafico



3) $f(x) = x\,e^{-x}$

La funzione è definita in $\mathbb{R}$.

E' positiva per $x > 0$ (e^{-x} è positiva in tutto il dominio) si annulla per $x=0$ ed è negativa per $x<0$.

$f(x)$ non ha simmetrie e nemmeno asintoti verticali.

Il calcolo dei limiti dà

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} x\,e^{-x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{e^{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{e^{x}} = 0$$

La funzione ha un asintoto orizzontale di equazione $y=0$ (l'asse x).

Per $x\to-\infty$ si ha: $\lim_{x\to-\infty} x\,e^{-x} = -\infty$

Non ci sono asintoti orizzontali in questo caso e neanche asintoti obliqui, infatti:

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} e^{-x} = \infty$$

La derivata prima è:

$$f'(x) = e^{-x} - x\,e^{-x} = e^{-x}(1-x)$$

la derivata è positiva per $x<1$ e negativa per $x>1$ (per $x=1$ si annulla).

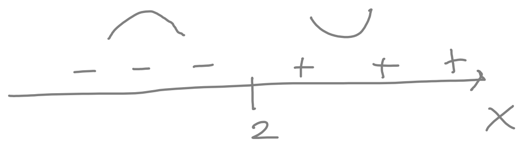
In $x=1$ la funzione ha quindi un massimo relativo $M\left(1, \frac{1}{e}\right)$, $\frac{1}{e} \simeq 0{,}37$.

La derivata seconda è:

$$f''(x) = -e^{-x}(1-x) - e^{-x} = -2e^{-x} + xe^{-x} =$$

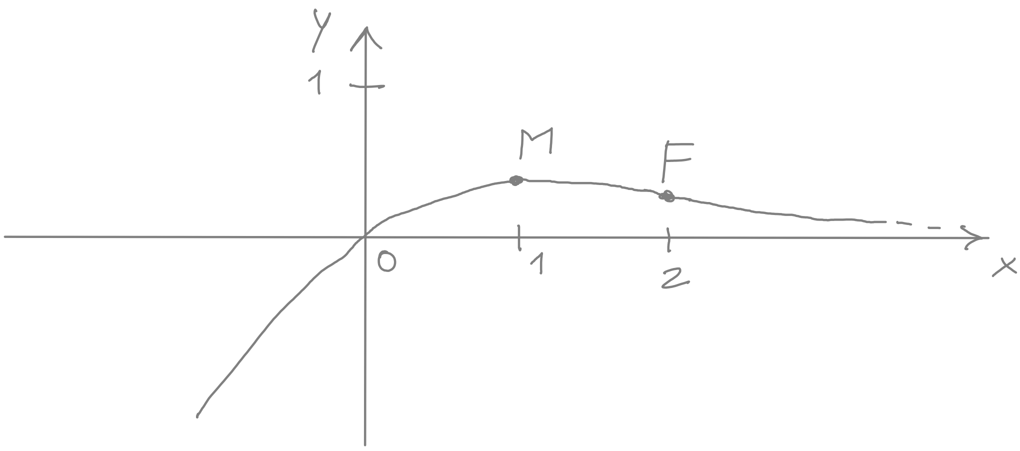
$$= = e^{-x}(x-2)$$

La derivata seconda è positiva per $x>2$ e negativa per $x<2$:



nel punto $x=2$ la funzione ha quindi un flesso ascendente $F(2, 2e^{-2})$, $e^{-2} = \frac{1}{e^2} \simeq 0{,}135$.

Il grafico è dunque il seguente:



4) $f(x) = \sin x - \cos x$ in $[0, 2\pi]$

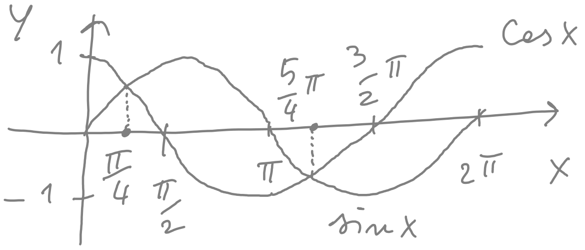
La funzione è periodica di periodo 2π, quindi è sufficiente studiarla in un intervallo di ampiezza 2π (per esempio l'intervallo $[0, 2\pi]$).

Il dominio è $[0, 2\pi]$.

Studiamo il segno della funzione:

$f(x) = \sin x - \cos x > 0$ se $\sin x > \cos x$,

risolviamo graficamente:



si vede che $\sin x > \cos x$ per $\frac{\pi}{4} < x < \frac{5}{4}\pi$.

Quindi $f(x)$ è positiva in questo intervallo e si annulla per $x = \frac{\pi}{4}$ e $x = \frac{5}{4}\pi$.

(Questi valori si possono ottenere anche risolvendo l'equazione goniometrica:

$\sin x = \cos x$, $\tan x = 1$)

La derivata prima è

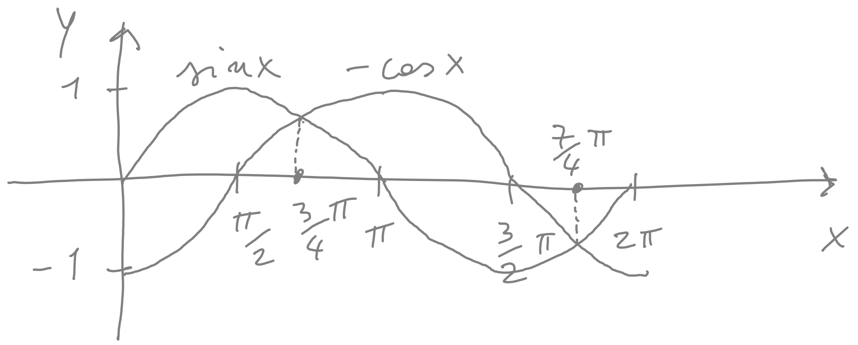
$$f'(x) = \cos x + \sin x$$

che si annulla per $\cos x + \sin x = 0$,

($\tan x = -1$, $x = \frac{3}{4}\pi$, $x = \frac{7}{4}\pi$) ed

è positiva se $\cos x + \sin x > 0$,

$\sin x > -\cos x$, graficamente:

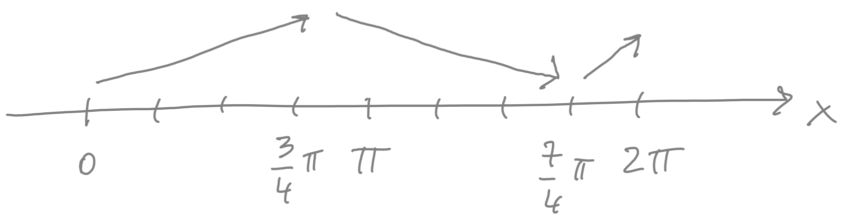


si vede che $\sin x > -\cos x$ per $0 < x < \frac{3}{4}\pi$

e per $\frac{7}{4}\pi < x < 2\pi$.

In questi intervalli la funzione è crescente (perché la derivata prima è positiva).

L'andamento di $f(x)$ è il seguente:



Si hanno un massimo relativo $M\left(\frac{3}{4}\pi, \sqrt{2}\right)$

$\left(f\left(\frac{3}{4}\pi\right) = \sin\frac{3}{4}\pi - \cos\frac{3}{4}\pi = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2} \right)$

un minimo relativo $m\left(\frac{7}{4}\pi, -\sqrt{2}\right)$

$\left(f\left(\frac{7}{4}\pi\right) = \sin\frac{7}{4}\pi - \cos\frac{7}{4}\pi = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} = -\sqrt{2} \right)$

Si ha poi $f(0) = f(2\pi) = \sin(0) - \cos(0) = 0 - 1 = -1$

I punti di flesso sono quelli a derivata seconda nulla:

$$f''(x) = \cos x - \sin x$$

$f''(x)$ si annulla per $\cos x - \sin x = 0$,

$\tan x = 1$, $x = \frac{\pi}{4}$ e $x = \frac{5}{4}\pi$.

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = f\left(\frac{5}{4}\pi\right) = 0$$

$F_1\left(\frac{\pi}{4}, 0\right)$ è un flesso discendente, infatti

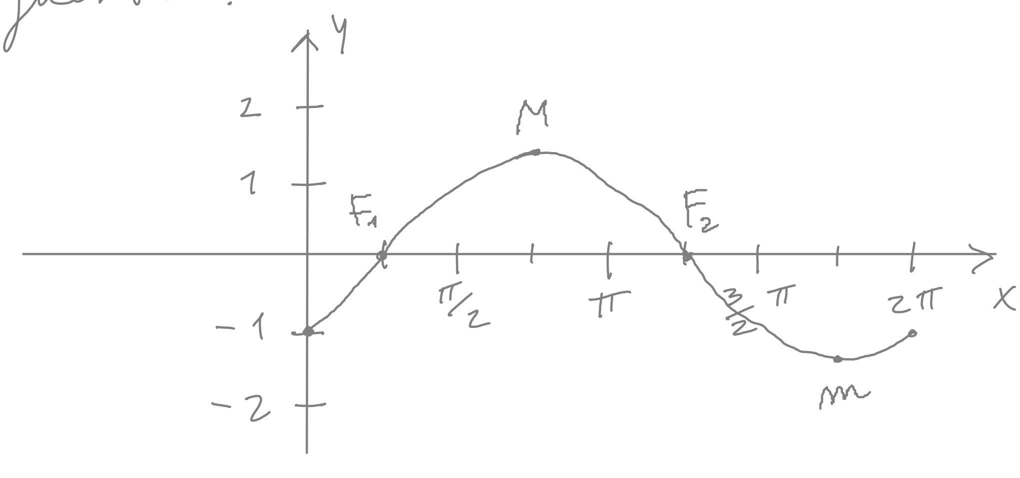
$$f'''\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) - \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} = -\sqrt{2} < 0$$

mentre

$F_2\left(\frac{5\pi}{4}, 0\right)$ è un flesso ascendente, infatti

$$f'''\left(\frac{5}{4}\pi\right) = -\sin\left(\frac{5\pi}{4}\right) - \cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) = +\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = +\sqrt{2} > 0$$

Il grafico della funzione è il seguente:



Esercizi

Disegna il grafico delle seguenti funzioni e controlla il risultato con Geogebra.

1) $$y = \frac{x}{x^2+1}$$

[$D = \mathbb{R}$, funzione dispari, asintoto $y=0$,
$m\left(-1, -\frac{1}{2}\right)$, $M\left(1, \frac{1}{2}\right)$, $F_1(0,0)$, $F_2\left(\sqrt{3}, \frac{\sqrt{3}}{4}\right)$, $F_3\left(-\sqrt{3}, -\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$]

2) $$y = \frac{x}{x^3-1}$$

[$D = \mathbb{R} - \{1\}$, asintoti: $x=1$, $y=0$
$M\left(-\frac{\sqrt[3]{4}}{2}, \frac{\sqrt[3]{4}}{3}\right)$, $F\left(-\sqrt[3]{2}, \frac{\sqrt[3]{2}}{3}\right)$]

3) $$y = \frac{\sqrt{1-x}}{x+1}$$

[$D = \{x \leq 1, x \neq -1\}$, asintoti: $x=-1$, $y=0$
$m(1,0)$, $\lim_{x \to 1^-} y' = -\infty$, $F\left(3 - \frac{4}{3}\sqrt{3}, \frac{\sqrt[4]{3}}{4}\right)$]

4) $$y = e^{\frac{x}{x+2}}$$

[$D = \mathbb{R} - \{-2\}$, asinti: $x=-2$ (sinistro), $y=e$
sempre crescente, $\lim_{x \to -2^+} y' = 0$, $F\left(-1, \frac{1}{e}\right)$]

5) $y = \dfrac{x}{\ln x - 1}$

$\left[D = \{x > 0,\ x \neq e\},\quad m(e^2, e^2),\quad F\left(e^3, \frac{1}{2}e^3\right) \right]$

6) $y = \dfrac{1 + \sin x}{\cos x}$ in $[0, 2\pi]$

$\Big[$ $D = [0, 2\pi] - \left\{\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\right\}$, asintoto: $x = \frac{\pi}{2}$

discontinuità eliminabile in $\left(\frac{3}{2}\pi, 0\right)$,

sempre crescente, $F\left(\frac{3}{2}\pi, 0\right)$ $\Big]$

7) $y = \dfrac{1 + \sin x}{\sin x + \cos x}$

$\Big[$ Funzione periodica, $D = [0, 2\pi] - \left\{\frac{3}{4}\pi, \frac{7}{4}\pi\right\}$,

asintoti: $x = \frac{3}{4}\pi$, $x = \frac{7}{4}\pi$, $m(0,1)$, $M\left(\frac{3}{2}\pi, 0\right)$ $\Big]$

8) $y = \sqrt[5]{x^4(x+5)}$

$\Big[$ $D = \mathbb{R}$, asintoto: $y = x + 1$, $M\left(-4, 2\sqrt[5]{8}\right)$,

minimo e cuspide in $(0,0)$, $\lim_{x \to -5} y' = +\infty$ $\Big]$