Teorema fondamentale del calcolo integrale

L'integrale definito è il valore della funzione integrale nel secondo estremo di integrazione:

$$\text{Area} = \int_a^b f(x)\,dx = F(b)$$

La conoscenza di una qualunque primitiva $\phi(x)$ della $f(x)$, che differirà dalla funzione integrale per una costante, permette di scrivere:

$$\phi(x) = F(x) + k$$

Dato che $F(a)=0$ si ha quindi:

$$\phi(a) = F(a) + k = k$$

e, sostituendo:

$$F(x) = \phi(x) - k = \phi(x) - \phi(a)$$

e $\quad F(b) = \phi(b) - \phi(a)$.

Uguagliando le espressioni trovate per $F(b)$ si ottiene infine:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \phi(b) - \phi(a)$$

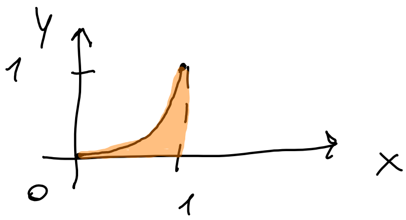
dove $\phi(x)$ è una qualunque primitiva della funzione $f(x)$.

L'ultima formula prende il nome di teorema fondamentale del calcolo integrale e permette di calcolare le aree sotto le curve semplicemente calcolando la differenza tra i valori che una qualunque primitiva assume negli estremi di integrazione.

Il problema del calcolo delle aree è dunque ricondotto al problema della determinazione delle primitive di una funzione, cioè al calcolo degli integrali indefiniti.

Esempio

Volendo calcolare l'area sotto la curva $f(x) = x^2$ tra 0 e 1, si osserva



che $\frac{x^3}{3}$ è una primitiva di $f(x)$ e quindi $\int_0^1 x^2\,dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3} - \frac{0}{3} = \frac{1}{3}$

(dove si intende $\left[f(x)\right]_a^b = f(b) - f(a)$).

Per quanto detto è quindi importante calcolare gli integrali indefiniti (primitive) delle funzioni.

A questo scopo sono stati sviluppati alcuni metodi di calcolo, basati sulle proprietà dell'integrale.