Proprietà degli integrali

Integrali indefiniti

L'integrale indefinito di una funzione $f(x)$ è l'insieme delle sue primitive, cioè delle funzioni la cui derivata è $f(x)$:

$$D \int f(x)\, dx = f(x)$$

Anche applicando gli operatori derivata e integrale in ordine inverso si ottiene nuovamente la funzione iniziale $f(x)$:

$$\int (D f(x))\, dx = f(x)$$

Dalle proprietà della derivata si hanno corrispondenti proprietà per l'integrale:

1) l'integrale indefinito è un operatore omogeneo:

$$\int k f(x)\,dx = k\int f(x)\,dx$$

infatti le due espressioni hanno la stessa derivata.

2) l'integrale indefinito è un operatore additivo:

$$\int (f(x) + g(x))\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$$

anche in questo caso le due espressioni hanno la stessa derivata.

L'integrale indefinito è quindi un operatore lineare (essendo omogeneo e additivo).

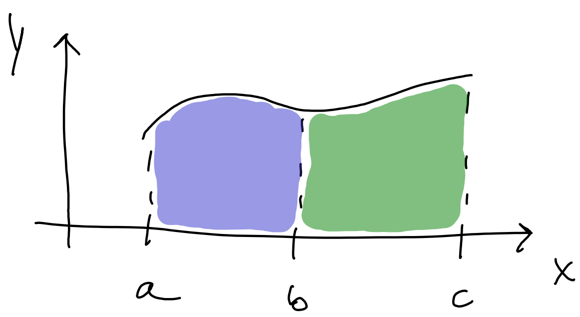
Integrale definito

Oltre alla linearità l'integrale definito ha anche la proprietà di additività sull'intervallo:

se $a < b < c$ allora

$$\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx$$

che discende dalla proprietà di additività delle aree.



La linearità dell'integrale permette di integrare ogni combinazione lineare di funzioni di cui si conosca una primitiva:

$$\int \left(a f(x) + b g(x)\right) dx = a \int f(x)\, dx + b \int g(x)\, dx$$

Esempi

1) $\int (x+1)\, dx = \frac{1}{2} x^2 + x + c$

2) $\int (2x+3)\, dx = x^2 + 3x + c$

3) $\int (x^3 - 2x^2 + 5x + 3)\, dx =$

$= \frac{1}{4} x^4 - \frac{2}{3} x^3 + \frac{5}{2} x^2 + 3x + c$

4) $\int \left(\frac{1}{x} + 1\right) dx = \ln|x| + x + c$

5) $\int (\sqrt{x} - 5)\, dx = \int \left(x^{\frac{1}{2}} - 5\right) dx =$

$= \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} - 5x + c = \frac{2}{3} \sqrt{x^3} - 5x + c$

6) $\int (e^x + 1)\, dx = e^x + x + c$

7) $\int \frac{1}{3 + 3x^2}\, dx = \frac{1}{3} \int \frac{1}{1 + x^2}\, dx =$

$= \frac{1}{3} \arctan x + c$

f) $\int \frac{x^4 - 3x^3 + x - 2}{x^3}\, dx =$

$= \int \left(x - 3 + \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x^3}\right) dx =$

$= \int (x - 3 + x^{-2} - 2x^{-3})\, dx =$

$= \frac{x^2}{2} - 3x - x^{-1} + x^{-2} + c =$

$= \frac{1}{2}x^2 - 3x - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + c =$

$= \frac{x^4 - 6x^3 - 2x + 2}{2x^2} + c$

g) $\int \frac{x^2 + 7}{x^2 + 1}\, dx =$

$= \int \left(\frac{x^2 + 1}{x^2 + 1} + \frac{6}{x^2 + 1}\right) dx =$

$= \int \left(1 + \frac{6}{x^2 + 1}\right) dx =$

$= x + 6 \arctan x + c$