Integrazione di funzioni composte

Se nella funzione integranda compare una funzione f e la sua derivata f' come fattore moltiplicativo, spesso è possibile ricondurre l'integrale a quello di una funzione elementare composta con la funzione f.

Esempi

1) Dall'integrale elementare $\int x^k dx = \frac{x^{k+1}}{k+1} + c$

si ricava che $\int f^k(x) \cdot f'(x)\, dx = \frac{f^{k+1}(x)}{k+1} + c$

(valide per $k \neq -1$)

2) Dall'integrale elementare $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + c$

si ricava che $\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln|f(x)| + c$

3) Dall'integrale elementare $\int \sin x\, dx = -\cos x + c$

si ricava che $\int \sin f(x) \cdot f'(x)\, dx = -\cos f(x) + c$

Esercizi

1) $\int 3e^{3x}\,dx =$

$= e^{3x} + c \qquad (f(x) = 3x\ ,\ f'(x) = 3)$

2) $\int \frac{3}{3x+1}\,dx =$

$= \ln|3x+1| + c \qquad \left(\begin{array}{l} f(x) = 3x+1 \\ f'(x) = 3 \end{array}\right)$

3) $\int \frac{2\ln x}{x}\,dx =$

$= \ln^2 x + c \qquad \left(\begin{array}{l} f(x) = \ln x \\ f'(x) = \frac{1}{x} \end{array}\right)$

4) $\int 4x(x^2+1)\,dx =$

$= (x^2+1)^2 + c \qquad \left(\begin{array}{l} f(x) = x^2+1 \\ f'(x) = 2x \end{array}\right)$

5) $\int \sin^3 x \cdot \cos x\,dx =$

$= \frac{\sin^4 x}{4} + c \qquad \left(\begin{array}{l} f(x) = \sin x \\ f'(x) = \cos x \end{array}\right)$

6) $$\int \cos 3x \, dx =$$

$$= \frac{1}{3} \sin 3x + c \qquad \left(\begin{array}{l} f(x) = 3x \\ f'(x) = 3 \end{array} \right)$$

7) $$\int \frac{3 \tan^2 x}{\cos^2 x} \, dx =$$

$$= \tan^3 x + c \qquad \left(\begin{array}{l} f(x) = \tan x \\ f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} \end{array} \right)$$

8) $$\int \frac{4x^3 + 3x^2}{x^4 + x^3 + 1} \, dx =$$

$$= \ln |x^4 + x^3 + 1| + c \qquad \left(\begin{array}{l} f(x) = x^4 + x^3 + 1 \\ f'(x) = 4x^3 + 3x^2 \end{array} \right)$$

9) $$\int \frac{e^x}{e^x + 1} \, dx =$$

$$= \ln |e^x + 1| + c \qquad \left(\begin{array}{l} f(x) = e^x + 1 \\ f'(x) = e^x \end{array} \right)$$

10) $$\int -\frac{\sin x}{2\cos x - 3}\,dx =$$

$$= \int \frac{\sin x}{3-2\cos x}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2\sin x}{3-2\cos x}\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\ln|3-2\cos x| + c \qquad \left(\begin{array}{l} f(x) = 3-2\cos x \\ f'(x) = \sin x \end{array}\right)$$

11) $$\int \frac{\cos x - \sin x}{\sin x + \cos x}\,dx =$$

$$= \ln|\sin x + \cos x| + c$$

$$\left(\begin{array}{l} f(x) = \sin x + \cos x \\ f'(x) = \cos x - \sin x \end{array}\right)$$

12) $$\int (6x^2+1)\sqrt[3]{2x^3+x+1}\,dx =$$

$$= \frac{3}{4}\cdot\sqrt[3]{(2x^3+x+1)^4} + c \qquad \left(\begin{array}{l} f(x) = 2x^3+x+1 \\ f'(x) = 6x^2+1 \end{array}\right)$$

13) $\displaystyle\int \frac{\cos x - \cos^3 x}{1-\cos x}\,dx =$ (5)

$$= \int \frac{\cos x\,(1-\cos^2 x)}{1-\cos x}\,dx =$$

$$= \int \cos x\,(1+\cos x)\,dx =$$

$$= \int \cos x\,dx + \int \cos^2 x\,dx =$$

$$= \sin x + \int \frac{\cos 2x + 1}{2}\,dx =$$

$$= \sin x + \int \frac{1}{2}\,dx + \frac{1}{2}\int \cos 2x\,dx =$$

$$= \sin x + \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\int 2\cos 2x\,dx =$$

$$= \sin x + \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x + c =$$

$$= \sin x + \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\cdot 2\sin x\cos x + c =$$

$$= \sin x + \frac{x}{2} + \frac{1}{2}\sin x\cos x + c$$

14) $\int \sin^2 x \, dx =$

$$= \int \frac{1-\cos 2x}{2} \, dx = \int \frac{1}{2} \, dx - \frac{1}{4}\int 2\cos 2x \, dx =$$

$$= \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x + c =$$

$$= \frac{1}{2}x - \frac{1}{4} \cdot 2\sin x \cos x + c =$$

$$= \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\sin x \cos x + c$$