Integrazione per sostituzione

Si può, con un cambiamento di variabile, trasformare un integrale in un altro integrale, possibilmente più facile da calcolare.

Dato l'integrale $\int f(x)\,dx$ e la funzione $x = g(t)$, si può sostituire a x la funzione g.

Anche il differenziale deve essere trasformato: $dx = g'(t)\,dt$.

Si ottiene allora l'integrale:

$$\int f(g(t)) \cdot g'(t)\,dt$$

Se questo è calcolabile e

$$\int f(g(t)) \cdot g'(t)\,dt = G(t) + c$$

allora $G'(t) = f(g(t)) \cdot g'(t)$

Sostituendo nuovamente $t = g^{-1}(x)$

si ottiene $G(t) = G(g^{-1}(x))$ che è

una primitiva di $f(x)$, infatti:

$$D\,G(g^{-1}(x)) = G'(g^{-1}(x)) \cdot D\,g^{-1}(x) =$$

$$= G'(g^{-1}(x)) \cdot \frac{1}{g'(t)} = G'(t) \cdot \frac{1}{g'(t)} =$$

$$= f(g(t)) \cdot g'(t) \cdot \frac{1}{g'(t)} = f(g(t)) = f(x)$$

Esempi

1) $$\int \frac{x}{\sqrt{x}\,(1+x)}\,dx = \left[\begin{array}{l}\text{con la}\\ \text{sostituzione}\\ \sqrt{x} = t, \quad x = t^2,\\ dx = 2t\,dt\end{array}\right]$$

$$= \int \frac{t^2}{\cancel{t}\,(1+t^2)}\,2\cancel{t}\,dt = 2\int \frac{t^2}{1+t^2}\,dt =$$

$$= 2\int \frac{t^2+1-1}{1+t^2}\,dt = 2\int dt - 2\int \frac{1}{1+t^2}\,dt =$$

$= 2t - 2\arctan t + c =$ [sostituendo nuovamente]

$= 2\sqrt{x} - 2\arctan\sqrt{x} + c$

In effetti derivando si ottiene la funzione integranda:

$D\left(2\sqrt{x} - 2\arctan\sqrt{x} + c\right) =$

$$= \frac{1}{\sqrt{x}} - 2\,\frac{1}{1+(\sqrt{x})^2}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x}\,(1+x)} = \frac{\cancel{1}+x-\cancel{1}}{\sqrt{x}\,(1+x)} = \frac{x}{\sqrt{x}\,(1+x)}$$

2) $$\int \frac{1}{x^2+25}\,dx = \int \frac{1}{25t^2+25}\,5\,dt =$$

[con la sostituzione $x = 5t$, $dx = 5\,dt$]

$$= \frac{1}{5}\int \frac{1}{t^2+1}\,dt = \frac{1}{5}\arctan t + c =$$

$$= \frac{1}{5}\arctan\frac{x}{5} + c$$

3) $$\int (x-5)\sqrt[3]{x}\,dx =$$

[con la sostituzione $\sqrt[3]{x}=t$, $x=t^3$, $dx=3t^2dt$]

$$=\int (t^3-5)\,t\,3t^2dt =$$

$$=\int (3t^6-15t^3)\,dt = \frac{3}{7}t^7-15\frac{t^4}{4}+c =$$

$$=\frac{3}{7}\sqrt[3]{x^7}-\frac{15}{4}\sqrt[3]{x^4}+c$$

Verifichiamo che derivando si ottiene la funzione integranda:

$$D\left(\frac{3}{7}\sqrt[3]{x^7}-\frac{15}{4}\sqrt[3]{x^4}+c\right)=$$

$$=\frac{3}{7}\cdot\frac{7}{3}x^{4/3}-\frac{15}{4}\cdot\frac{4}{3}x^{1/3}=$$

$$=\sqrt[3]{x^4}-5\sqrt[3]{x} = x\sqrt[3]{x}-5\sqrt[3]{x}=$$

$$=(x-5)\sqrt[3]{x}$$