Integrazione per parti

A partire dalla formula di derivazione del prodotto di due funzioni è possibile ottenere un nuovo metodo di integrazione, il metodo di integrazione per parti.

Sappiamo che $D\, f \cdot g = f' \cdot g + f \cdot g'$,

cioè $f' \cdot g = D\, f \cdot g - f \cdot g'$

Integrando i due termini si ottiene:

$$\int f' \cdot g \, dx = f \cdot g - \int f \cdot g' \, dx$$

Dato poi che f è una primitiva di f', si può anche scrivere:

$$\int f \cdot g \, dx = F \cdot g - \int F \cdot g' \, dx$$

$$(\text{con } F' = f)$$

Quindi l'integrale del prodotto di due funzioni è uguale al prodotto della primitiva di una funzione per l'altra meno l'integrale della stessa primitiva per la derivata dell'altra funzione.

Esempi

1) $$\int x \cdot \sin x \, dx = -\cos x \cdot x + \int \cos x \, dx =$$

$$= -x\cos x + \sin x + c$$

Infatti, derivando:

$$D(-x\cos x + \sin x + c) =$$

$$= -\cos x + x\sin x + \cos x = x\sin x$$

2) $$\int \frac{x}{(x+1)^2} \, dx = -\frac{1}{(x+1)} \cdot x + \int \frac{1}{x+1} \, dx =$$

$$= -\frac{x}{x+1} + \ln|x+1| + c$$

3) $$\int x^2 e^x \, dx = e^x x^2 - \int e^x \cdot 2x \, dx =$$

$$= e^x \cdot x^2 - \left[e^x \cdot 2x - \int e^x \cdot 2 \, dx \right] =$$

$$= x^2 \cdot e^x - 2xe^x + 2e^x + c =$$

$$= e^x \left(x^2 - 2x + 2 \right) + c$$

4) $$\int \cos^2 x \, dx = \sin x \cos x + \int \sin^2 x \, dx =$$

$$= \sin x \cos x + \int (1 - \cos^2 x) \, dx =$$

$$= \sin x \cos x + x - \int \cos^2 x \, dx$$

da cui:

$$2 \int \cos^2 x \, dx = x + \sin x \cos x$$

$$\int \cos^2 x \, dx = \frac{x + \sin x \cos x}{2} + c$$

Infatti, derivando:

$$D \left(\frac{x + \sin x \cos x}{2} + c \right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos^2 x - \frac{1}{2} \sin^2 x =$$

$$= \frac{1}{2} \left(1 - \sin^2 x \right) + \frac{1}{2} \cos^2 x = \cos^2 x$$