Il teorema di Cauchy

Questo teorema è una generalizzazione del teorema di Lagrange.

Teorema

Se due funzioni $f(x)$ e $g(x)$, sono continue in $[a,b]$ e derivabili in $]a,b[$, con $g(x)$ tale che $g'(x) \neq 0$ in $]a,b[$, allora esiste almeno un punto $c \in]a,b[$ tale che

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} .$$

La dimostrazione è simile a quella del teorema di Lagrange e si basa sul teorema di Rolle.

Dopo aver definito la funzione ausiliaria

$$F(x) = f(x) \cdot (g(b)-g(a)) - g(x) \cdot (f(b)-f(a)),$$

si osserva che $F(x)$ è continua e derivabile perché lo sono le funzioni $f(x)$ e $g(x)$, inoltre $F(a) = F(b)$, infatti:

$$F(a) = f(a)g(b) - \cancel{f(a)g(a)} - g(a)f(b) + \cancel{g(a)f(a)} =$$

$$= f(a)g(b) - g(a)f(b)$$

$$F(b) = \cancel{f(b)\,g(b)} - f(b)\,g(a) - \cancel{g(b)\,f(b)} + g(b)\,f(a) =$$

$$= f(a)\,g(b) - g(a)\,f(b)$$

Per il teorema di Rolle quindi esiste un punto $c \in \,]a,b[$ tale che $F'(c)=0$, cioè

$$F'(c) = f'(c)\cdot\big(g(b)-g(a)\big) - g'(c)\cdot\big(f(b)-f(a)\big) = 0$$

da cui si ottiene la formula del teorema: $$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}.$$

Nota: deve essere anche $g(a) \neq g(b)$, ma questo è assicurato dal fatto che $g'(x) \neq 0$ in $]a,b[$.

Esempio

$$f(x) = 3x^2 + x, \qquad g(x) = -x^2 + 5 \qquad \text{in } [1,2].$$

Sono funzioni continue e derivabili in $[1,2]$, inoltre $g'(x) = -2x$ non si annulla mai nell'intervallo $]1,2[$.

Allora esiste un punto c in $]1,2[$ tale che

$$\frac{6c+1}{-2c} = \frac{14-4}{1-4},$$

$$-18c - 3 = -28c + 8c,$$

$$2c = 3, \qquad c = \frac{3}{2} \text{ (compreso tra 1 e 2)}.$$