Il teorema di Rolle

Se una funzione $f(x)$, definita in un intervallo chiuso $[a,b]$, è:

a) continua in ogni punto di $[a,b]$,

b) derivabile in ogni punto di $]a,b[$,

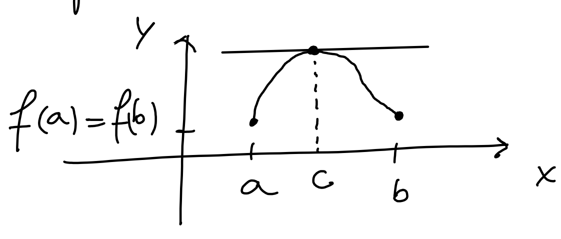
c) $f(a)=f(b)$

allora esiste almeno un punto c di $]a,b[$ tale che $f'(c)=0$.

(Senza dimostrazione)

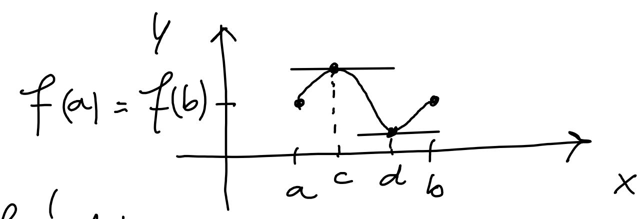
Osservazioni

- I punti c in cui $f'(c)=0$ sono quelli a tangente orizzontale



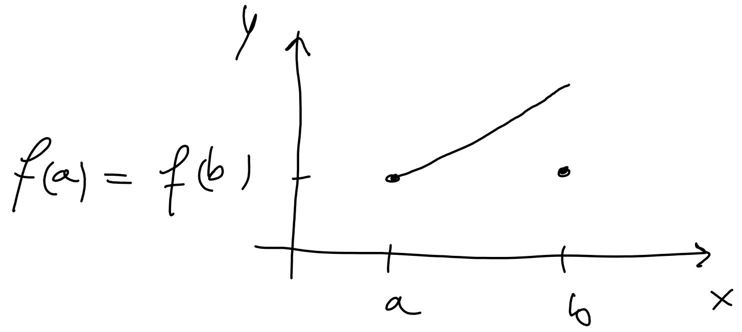
- Possono esistere più punti tali che $f'=0$.

Ad esempio:



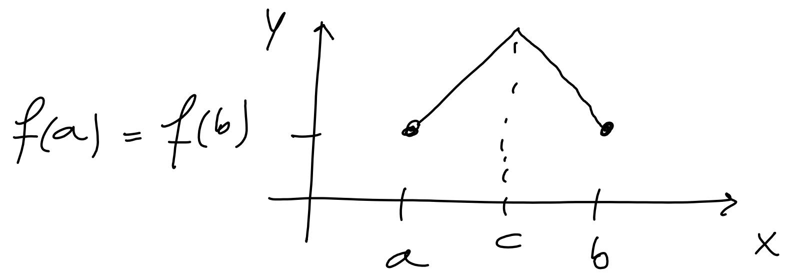
con $f'(c)=0$, $f'(d)=0$

– Se mancasse la condizione a) (continuità della funzione) il teorema non sarebbe vero, ecco un controesempio:



in b la funzione non è continua ma le condizioni b e c sono verificate e non esiste alcun punto a derivata nulla.

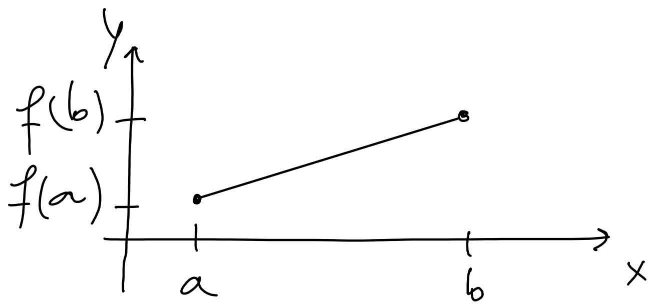
– Se mancasse la condizione b) (la derivabilità nei punti interni dell'intervallo) il teorema non sarebbe vero. Un controesempio:



la funzione è continua in $[a, b]$, $f(a) = f(b)$, ma non è derivabile in c.

Non esistono punti a derivata nulla.

- Anche se mancasse la terza condizione il teorema sarebbe falso, infatti se $f(a) \neq f(b)$ si ottiene un semplice controesempio con la retta che congiunge i punti $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$.



La funzione, pur essendo continua e derivabile, non ha punti a derivata nulla.

Esercizi

Stabilisci se il teorema di Rolle è applicabile nei seguenti casi:

1) $f(x) = x^2 - 4x + 2$ in $[1, 3]$

$f(x)$ è continua e derivabile,

$f(1) = -1$, $f(3) = -1$, quindi

deve esistere un punto c tale che

$f'(c) = 0$.

Derivando e risolvendo l'equazione si trova che $c = 2$: $2c - 4 = 0$, $c = 2$.

2) $f(x) = x^7 + x$ in $[0, 1]$.

La funzione è continua e derivabile, ma $f(0) = 0$ e $f(1) = 2$, quindi non è detto che esistano punti c tali che $f'(c) = 0$. Potrebbero però esistere:

$$7c^6 + 1 = 0, \qquad c^6 = -\frac{1}{7}$$

che non ha soluzioni, quindi in questo caso non esistono punti a derivata nulla.

3) $f(x) = x^4 - 10x^2 + 9$ in $[-3, 3]$

$f(x)$ è continua e derivabile in $[-3, 3]$, inoltre $f(-3) = f(3)$.

Esistono questa volta 3 punti in cui $f'(x) = 0$:

$f'(x) = 4x^3 - 20x = 0$ per $x = 0$ e $x = \pm\sqrt{5}$