I polinomi di Taylor

Cerchiamo di esprimere un polinomio di ordine n per mezzo delle sue derivate:

$$P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots + a_n x^n$$

per $x=0$ si ha $P(0) = a_0$

Se calcoliamo la derivata prima del polinomio otteniamo:

$$P^{(1)}_{(x)} = P'(x) = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \dots + n a_n x^{n-1}$$

che, calcolata per $x=0$ dà $P'_{(0)} = a_1$

Calcolando le derivate di ordine successivo si ha:

$$P^{(2)}_{(x)} = 2a_2 + 3 \cdot 2 \cdot a_3 x + \dots + n(n-1) a_n x^{n-2}$$

con $P^{(2)}_{(0)} = 2a_2$

$$P^{(3)}_{(x)} = 3 \cdot 2 a_3 + 4 \cdot 3 \cdot 2 a_4 x + \dots + n(n-1)(n-2) a_n x^{n-3}$$

con $P^{(3)}_{(0)} = 3 \cdot 2 \cdot a_3$, ecc...

In definitiva si ottengono le uguaglianze:

$P(0) = a_0$, $P^{(1)}_{(0)} = a_1$, $P^{(2)}_{(0)} = 2a_2$, $P^{(3)}_{(0)} = 3!\, a_3$,

$P^{(4)}(0) = 4!\, a_4, \quad \dots, \quad P^{(n)}(0) = n!\, a_n$

dove $n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot 1$

Da queste uguaglianze si ottengono i valori seguenti per i coefficienti del polinomio $P(x)$:

$$a_0 = P(0), \quad a_1 = P^{(1)}(0), \quad a_2 = \frac{P^{(2)}(0)}{2!}, \quad a_3 = \frac{P^{(3)}(0)}{3!},$$

$$a_4 = \frac{P^{(4)}(0)}{4!}, \quad \dots, \quad a_n = \frac{P^{(n)}(0)}{n!}$$

Si può riscrivere allora il polinomio nella forma:

$$P(x) = P(0) + P^{(1)}(0) \cdot x + \frac{P^{(2)}(0)}{2!} \cdot x^2 + \dots + \frac{P^{(n)}(0)}{n!} \cdot x^n$$

È sempre possibile esprimere un polinomio di grado n in questa forma.

Formula di Taylor

Se passiamo dal caso dei polinomi a quello delle funzioni si può dimostrare che se una funzione è derivabile $n+1$ volte allora è esprimibile in una forma simile a quella vista per i polinomi, con l'aggiunta di un termine di correzione, il resto $\varepsilon(x_0, n)$, che diventa sempre più piccolo al crescere di n:

$$f(x) = f(0) + f^{(1)}(0) \cdot x + \frac{f^{(2)}(0)}{2!} \cdot x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \cdot x^n + \varepsilon(x, n)$$

Questa viene chiamata formula di Taylor di ordine n in un intorno di $x = 0$.

Con ragionamenti simili si ottiene la formula in un intorno di un punto x_0 qualsiasi:

$$f(x) = f(x_0) + f^{(1)}(x_0) \cdot (x - x_0) + \frac{f^{(2)}(x_0)}{2!} \cdot (x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \cdot (x - x_0)^n + \varepsilon(x, n)$$

Il resto $\varepsilon(x, n)$ può essere scritto, per poi essere valutato, in diversi modi.

Sviluppo in serie di Taylor

Se una funzione è infinitamente derivabile (cioè ammette derivate di tutti gli ordini) allora si può pensare di aggiungere infiniti termini e, sotto certe condizioni, il resto tende a zero: $\varepsilon(x,n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

Si parla allora di sviluppo in serie di Taylor di una funzione nell'intorno di un punto x_0:

$$f(x) = f(x_0) + f^{(1)}(x_0)\cdot(x-x_0) + \frac{f^{(2)}(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots =$$

$$= \sum_{0}^{\infty} {}_n \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\cdot(x-x_0)^n,$$

con $f^{(0)}(x_0) = f(x_0)$ e $0! = 1$

Esempi

1) Scrivi lo sviluppo in serie di Taylor della funzione e^x in un intorno di $x_0=0$.

La funzione $f(x) = e^x$ è infinitamente derivabile:

$$f(x) = f^{(1)}(x) = f^{(2)}(x) = \dots = f^{(n)}(x) = \dots = e^x$$

e $f(0) = f^{(1)}(0) = f^{(2)}(0) = \dots = f^{(n)}(0) = \dots = e^0 = 1$

Si ha quindi lo sviluppo:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots = \sum_{0}^{\infty} {}_n \frac{x^n}{n!}$$

Per $x=1$ si ottiene una serie numerica che converge piuttosto lentamente (come si può verificare con una calcolatrice) al valore e:

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} + \dots = \sum_{0}^{\infty} {}_n \frac{1}{n!}$$

2) Determina lo sviluppo in serie di Taylor della funzione $f(x) = \sin x$ in un intorno di $x_0 = 0$.

La funzione $f(x) = \sin x$ è infinitamente derivabile e i valori delle derivate in $x_0 = 0$ sono:

$f^{(0)}(0) = \sin(0) = 0$, $f^{(1)}(0) = \cos(0) = 1$,

$f^{(2)}(0) = -\sin(0) = 0$, $f^{(3)}(0) = -\cos(0) = -1$, ...

dalla derivata quarta i valori si ripetono periodicamente, si ha quindi lo sviluppo a segni alterni:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$$

3) Determina lo sviluppo in serie di Taylor della funzione $f(x) = \cos x$ in un intorno di $x_0 = 0$.

La funzione $f(x) = \cos x$ è infinitamente derivabile e i valori delle derivate in $x_0 = 0$ sono:

$f^{(0)}(0) = \cos(0) = 1$, $f^{(1)}(0) = -\sin(0) = 0$,

$f^{(2)}(0) = -\cos(0) = -1$, $f^{(3)}(0) = \sin(0) = 0$, ...

dalla derivata quarta i valori si ripetono periodicamente, si ha quindi lo sviluppo a segni alterni:

$$\sin x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$$

4) Scrivi i primi tre termini dello sviluppo di Taylor della funzione $f(x) = \sqrt{x}$, in un intorno di $x_0 = 1$.

$f(1) = \sqrt{1} = 1$, $f^{(1)}(1) = \frac{1}{2\sqrt{1}} = \frac{1}{2}$, $f^{(2)}(1) = -\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{\sqrt{1}} = -\frac{1}{4}$

Si può scrivere quindi, al secondo ordine,

$$\sqrt{x} \simeq 1 + \frac{1}{2}(x-1) - \frac{1}{4}\frac{(x-1)^2}{2} = \frac{-x^2 + 6x + 3}{8}$$

per esempio: $\sqrt{1,3} \simeq 1,140$, $\frac{-1,3^2 + 6 \cdot 1,3 + 3}{8} \simeq 1,139$