VERSO LA SECONDA PROVA DI MATEMATICA 2017

RISOLUZIONE DELLA PROVA

Problemi

1 **a.** Determiniamo l'equazione della parabola di vertice $V\left(3; \frac{17}{2}\right)$ e passante per il punto $P(12; 4)$.

$$\begin{cases} -\frac{b}{2a} = 3 & \text{ascissa del vertice} \\ 9a + 3b + c = \frac{17}{2} & \text{passaggio per } V \\ 144a + 12b + c = 4 & \text{passaggio per } P \end{cases}$$

$$\begin{cases} b = -6a \\ 9a - 18a + c = \frac{17}{2} \\ 144a - 72a + c = 4 \end{cases} \to \begin{cases} b = -6a \\ c = \frac{17}{2} + 9a \\ 72a + \frac{17}{2} + 9a = 4 \end{cases} \to \begin{cases} a = -\frac{1}{18} \\ b = \frac{1}{3} \\ c = 8 \end{cases}$$

La parabola ha equazione $y = -\frac{1}{18}x^2 + \frac{1}{3}x + 8$.

Determiniamo il valore di k nell'equazione della curva $y = e^{12-x} + k$ imponendo il passaggio per $P(12, 4)$:

$e^{12-12} + k = 4 \to k = 4 - 1 = 3$.

Il profilo $f(x)$ ha equazione:

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{18}x^2 + \frac{1}{3}x + 8 & \text{se } 0 \le x \le 12 \\ e^{12-x} + 3 & \text{se } 12 < x \le 26 \end{cases}.$$

b. La funzione $f(x)$ è continua perché le funzioni che la compongono, una funzione polinomiale e una funzione esponenziale, sono continue in $\mathbb{R}$ e perché non c'è discontinuità nel punto di raccordo dei due tratti $x = 12$. Infatti:

$$\lim_{x \to 12^+} f(x) = \lim_{x \to 12^+} (e^{12-x} + 3) = 4 = f(12).$$

Le due funzioni componenti sono derivabili in $\mathbb{R}$:

$$f'(x) = \begin{cases} -\frac{1}{9}x + \frac{1}{3} & \text{se } 0 < x < 12 \\ -e^{12-x} & \text{se } 12 < x < 26 \end{cases}.$$

Inoltre:

$$\lim_{x \to 0^+} f'(x) = \lim_{x \to 0^+} \left(-\frac{1}{9}x + \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3} = f'_+(0),$$

$$\lim_{x \to 26^-} f'(x) = \lim_{x \to 26^-} (-e^{12-x}) = -e^{-14} = f'_-(26).$$

Dobbiamo solo controllare che esista la derivata in $x = 12$:

$$\lim_{x \to 12^-} f'(x) = \lim_{x \to 12^-} \left(-\frac{1}{9}x + \frac{1}{3}\right) = -1 = f'_-(12),$$

$$\lim_{x \to 12^+} f'(x) = \lim_{x \to 12+} (-e^{12-x}) = -1 = f'_+(12).$$

Quindi $f'_-(12) = f'_+(12) = -1 = f'(12)$ e la funzione è derivabile in tutto il suo dominio.

c. Calcoliamo l'area compresa tra $f(x)$ e l'asse x per $0 \leq x \leq 26$, che rappresenta metà della sezione del vaso.

$$\int_0^{26} f(x)dx = \int_0^{12}\left(-\frac{1}{18}x^2 + \frac{1}{3}x + 8\right)dx + \int_{12}^{26}(e^{12-x} + 3)dx =$$

$$\left[-\frac{1}{18}\cdot\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{6} + 8x\right]_0^{12} + [-e^{12-x} + 3x]_{12}^{26} =$$

$$(-32 + 24 + 96) + (-e^{-14} + 78 + 1 - 36) = 131 - e^{-14}$$

L'area della sezione è:

$$A = 2(131 - e^{-14}) \simeq 262\ \text{cm}^2 = 2{,}62\ \text{dm}^2.$$

d. La funzione $f(x)$ interseca l'asse y nel punto $(0; 8)$; inoltre:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}(e^{12-x} + 3) = 3.$$

Per la funzione $g(x) = \dfrac{ax + b}{x + 1}$ si ha $g(0) = \dfrac{b}{1} = b$ e $\lim_{x\to+\infty} g(x) = a$. Imponendo le condizioni $g(0) = 8$ e $\lim_{x\to+\infty} g(x) = 3$, otteniamo allora $a = 3$ e $b = 8$. La funzione cercata è:

$$g(x) = \frac{3x + 8}{x + 1}.$$

Indichiamo con h l'altezza del vaso. La condizione affinché l'area della sezione sia la stessa del profilo precedente è:

$$\int_0^h g(x)dx = \int_0^{26} f(x)dx = 131 - e^{-14}.$$

Abbiamo:

$$\int_0^h g(x)dx = \int_0^h \frac{3x+8}{x+1}dx = \int_0^h\left(3 + \frac{5}{x+1}\right)dx = \left[3x + 5\ln|x+1|\right]_0^h = 3h + 5\ln(h+1).$$

La condizione è quindi:

$$3h + 5\ln(h+1) = 131 - e^{-14}.$$

Questa equazione nell'incognita h non è risolubile in maniera elementare, quindi dobbiamo applicare uno dei metodi di risoluzione approssimata. Dobbiamo determinare uno zero della funzione $u(x) = 3x + 5\ln(x+1) - 131 + e^{-14}$. Poiché $e^{-14} \simeq 8 \cdot 10^{-7}$, possiamo semplificare il problema sostituendo la funzione $u(x)$ con $v(x) = 3x + 5\ln(x+1) - 131$.

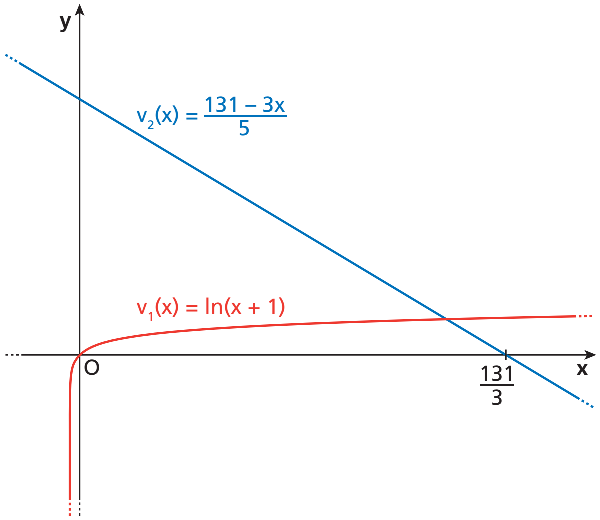
Effettuiamo uno studio grafico per determinare un intervallo in cui è contenuto esattamente uno zero della funzione. Riscriviamo la condizione $v(x) = 0$:

$$3x + 5\ln(x+1) - 131 = 0 \rightarrow$$

$$\ln(x+1) = \frac{131 - 3x}{5}.$$

Disegniamo i grafici delle funzioni

$$v_1(x) = \ln(x+1) \text{ e } v_2(x) = \frac{131 - 3x}{5}.$$



Osserviamo che:

- $v_1(x)$ è monotòna crescente, $v_2(x)$ è monotòna decrescente, quindi la funzione $v(x)$ ha al più uno zero;
- $v_1(0) = \ln 1 = 0$, $v_2(0) = \frac{131}{5} \rightarrow v_1(0) < v_2(0)$;
- $v_1\left(\frac{131}{3}\right) = \ln\left(\frac{131}{3} + 1\right) > 0$, $v_2\left(\frac{131}{3}\right) = 0 \rightarrow v_1\left(\frac{131}{3}\right) > v_2\left(\frac{131}{3}\right)$.

Ricaviamo che lo zero cercato è unico e si trova nell'intervallo $\left]0; \frac{131}{3}\right[$.

Possiamo confermare quanto ricavato con il metodo grafico calcolando $v(x)$ negli estremi dell'intervallo:

$$v(0) = 3 \cdot 0 + 5\ln 1 - 131 = -131 < 0;\ v\left(\frac{131}{3}\right) = 3 \cdot \frac{131}{3} + 5\ln\left(\frac{131}{3} + 1\right) - 131 = 5\ln\left(\frac{134}{3}\right) > 0.$$

Per il teorema di esistenza degli zeri esiste almeno uno zero nell'intervallo $\left]0; \frac{131}{3}\right[$.

Utilizziamo il metodo di bisezione per determinarne una sua approssimazione. Per semplicità di calcolo applichiamo il metodo all'intervallo $[a_0; b_0] = [0; 44]$, che contiene l'intervallo $\left[0; \frac{131}{3}\right]$.

n	a_n	b_n	$v(a_n)$	$v(b_n)$	$m_n = \frac{a_n + b_n}{2}$	$v(m_n)$
0	0,000	44,000	−131,000	20,033	22,000	−49,323
1	22,000	44,000	−49,323	20,033	33,000	−14,368
2	33,000	44,000	−14,368	20,033	38,500	2,882
3	33,000	38,500	−14,368	2,882	35,750	−5,729
4	35,750	38,500	−5,729	2,882	37,125	−1,421
5	37,125	38,500	−1,421	2,882	37,813	0,731
6	37,125	37,813	−1,421	0,731	37,469	−0,345
7	37,469	37,813	−0,345	0,731	37,641	0,193
8	37,469	37,641	−0,345	0,193	37,555	−0,076
9	37,555	37,641	−0,076	0,193	37,598	0,059

Il valore approssimato della soluzione con una cifra decimale esatta è 37,5. L'altezza del vaso deve quindi essere $h \simeq 37,5$ cm.

e. La funzione $f(x)$ non è invertibile, perché l'arco di parabola nell'intervallo [0; 12] non è il grafico di una funzione iniettiva.

La funzione $g(x)$, invece, è invertibile. Infatti $g(x)$ è continua nell'intervallo $[0; +\infty[$ e decrescente, in quanto $g'(x) = -\frac{5}{(x+1)^2} < 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} - \{-1\}$ e quindi $g'(x) < 0 \quad \forall x \in [0; +\infty[$. Ricaviamo l'espressione analitica dell'inversa:

$$y = \frac{3x + 8}{x + 1} \rightarrow x = \frac{y - 8}{3 - y}.$$

Scambiando x con y, otteniamo:

$$g^{-1}(x) = \frac{x - 8}{3 - x}.$$

2 **a.** Studiamo il segno di $f'(x)$ utilizzando le informazioni su crescenza e decrescenza di $f(x)$ deducibili dal suo grafico.
$f(x)$ è crescente negli intervalli $]-\infty; 0[$, $]2; 3[$ e $]3; +\infty[$, mentre è decrescente nell'intervallo $]0; 2[$. In corrispondenza di $x = 2$ la funzione ha un punto di minimo relativo. Perciò $f'(x) > 0$ per $x < 0 \vee 2 < x < 3 \vee x > 3$, $f'(x) < 0$ per $0 < x < 2$ e $f'(x) = 0$ per $x = 2$.

In $x = 0$ e $x = 3$ la funzione $f(x)$ ha tangente verticale, quindi $f'(x)$ non è definita in tali punti. Il dominio di $f(x)$ è $\mathbb{R}$, mentre il dominio di $f'(x)$ è $\mathbb{R} - \{0; 3\}$.

b. Nel punto $x = 0$ la funzione $f(x)$ ha una cuspide, quindi:

$$\lim_{x \to 0^-} f'(x) = +\infty; \qquad \lim_{x \to 0^+} f'(x) = -\infty.$$

In $x = 3$ la funzione $f(x)$ ha un flesso a tangente verticale, perciò:

$$\lim_{x \to 3^-} f'(x) = \lim_{x \to 3^+} f'(x) = +\infty.$$

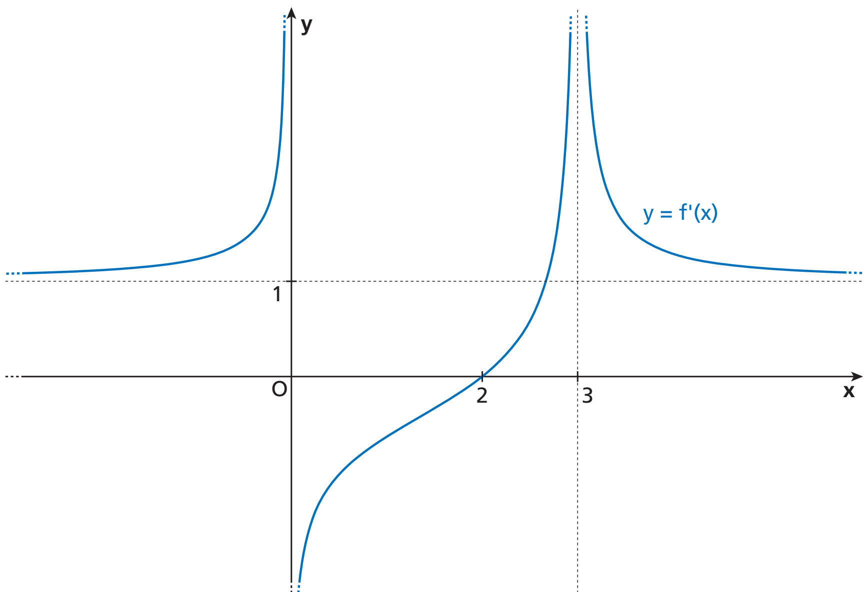
L'asintoto obliquo ha coefficiente angolare 1, quindi:

$$\lim_{x \to \infty} f'(x) = 1.$$

c. Per quanto visto nel punto precedente, $f'(x)$ ha due asintoti verticali, di equazioni $x = 0$ e $x = 3$, e un asintoto orizzontale di equazione $y = 1$.
Per determinare la crescenza di $f'(x)$, studiamo il segno della sua derivata prima, cioè di $f''(x)$, deducendolo dalla concavità di $f(x)$ rappresentata nel grafico.

$f'(x)$ è crescente negli intervalli in cui $f''(x)$ è positiva, cioè quando $f(x)$ rivolge la concavità verso l'alto, altrimenti è decrescente. Quindi $f'(x)$ è crescente per $x < 0 \vee 0 < x < 3$ e decrescente per $x > 3$.

d. Tracciamo un possibile grafico di $f'(x)$.



Dal grafico osserviamo che, poiché $\lim_{x \to 0^+} f'(x) = -\infty$, $\lim_{x \to 3^-} f'(x) = +\infty$ e $f'(x)$ è una funzione continua in $]0; 3[$, $f'(x)$ deve cambiare concavità in questo intervallo, dunque esiste almeno un punto di flesso $x_F \in \,]0; 3[$.

e. Poiché l'asintoto obliquo di $f(x)$ ha coefficiente angolare 1, abbiamo:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = 1 \to \lim_{x \to \infty} \frac{\sqrt[3]{ax^3 + bx^2 + cx}}{x} = 1 \to \sqrt[3]{a} = 1 \to a = 1.$$

La funzione è perciò della forma $f(x) = \sqrt[3]{x^3 + bx^2 + cx}$.
La condizione $f(3) = 0$ diventa:

$$\sqrt[3]{27 + 9b + 3c} = 0 \to 27 + 9b + 3c = 0 \to 9 + 3b + c = 0.$$

Calcoliamo la derivata prima di $f(x)$:

$$f'(x) = \frac{3x^2 + 2bx + c}{3\sqrt[3]{(x^3 + bx^2 + cx)^2}}.$$

Poiché $f'(2) = 0$:

$$\frac{3 \cdot 2^2 + 2b \cdot 2 + c}{3\sqrt[3]{(2^3 + b \cdot 2^2 + c \cdot 2)^2}} = 0 \to 12 + 4b + c = 0, \text{ con } 8 + 4b + 2c \neq 0.$$

Per trovare b e c risolviamo perciò il seguente sistema:

$$\begin{cases} 9 + 3b + c = 0 \\ 12 + 4b + c = 0 \\ 8 + 4b + 2c \neq 0 \end{cases} \to \begin{cases} b = -3 \\ c = 0 \\ 8 - 12 \neq 0 \end{cases}.$$

La soluzione del sistema $b = -3$ e $c = 0$ è accettabile e la funzione è $f(x) = \sqrt[3]{x^3 - 3x^2}$.

Quesiti

1 Determiniamo $f'(x)$ calcolando l'integrale indefinito di $f''(x)$.

$$f'(x) = \int f''(x)dx = \int (a + \ln x)dx = \int adx + \int \ln x\, dx.$$

Integriamo per parti: $\int \ln x\, dx = x\ln x - x + c$.

Quindi $f'(x) = ax + x\ln x - x + c$.

Per determinare c, utilizziamo la condizione $f'(1) = -1$ e otteniamo:

$$a - 1 + c = -1 \to c = -a.$$

L'espressione analitica di $f'(x)$ è allora:

$$f'(x) = (a - 1)x + x\ln x - a.$$

Calcoliamo ora l'integrale indefinito di $f'(x)$ per determinare $f(x)$.

$$f(x) = \int f'(x)dx = \int [(a - 1)x + x\ln x - a]dx.$$

Integriamo per parti:

$$\int x\ln x\, dx = \frac{x^2}{2}\ln x - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x} dx = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4} + c.$$

Otteniamo:

$$f(x) = (a - 1)\frac{x^2}{2} + \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4} - ax + k.$$

Applichiamo la condizione $f(1) = -\frac{1}{4}$:

$$\frac{a - 1}{2} - \frac{1}{4} - a + k = -\frac{1}{4} \to k = \frac{a + 1}{2}.$$

Otteniamo:

$$f(x) = (a - 1)\,\frac{x^2}{2} + \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4} - ax + \frac{a + 1}{2}.$$

Determiniamo ora a con la condizione $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$.
Abbiamo:

$$\lim_{x\to 0}\left[(a-1)\frac{x^2}{2}+\frac{x^2}{2}\ln x-\frac{x^2}{4}-ax+\frac{a+1}{2}\right]=\frac{a+1}{2},$$

in cui, in particolare, applicando il teorema di De L'Hospital, risulta che $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2}{2}\ln x=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln x}{\frac{2}{x^2}}=0$.

Quindi: $\frac{a+1}{2}=0 \to a=-1$.

Perciò: $f(x)=-\frac{5}{4}x^2+x+\frac{x^2}{2}\ln x$.

La derivata seconda di $f(x)$ è $f''(x)=a+\ln x=-1+\ln x$. Studiamo il suo segno:

$$f''(x)>0 \to -1+\ln x>0 \to \ln x>1 \to x>e.$$

Quindi in $x=e$ la funzione $f(x)$ ha un flesso. L'equazione della retta tangente al grafico di $f(x)$ in $x=e$ è $y=f'(e)(x-e)+f(e)$.

Poiché $f'(x)=(a-1)x+x\ln x-a=-2x+x\ln x+1$, otteniamo $f'(e)=-2e+e+1=1-e$.

Inoltre $f(e)=-\frac{5}{4}e^2+e+\frac{e^2}{2}=e-\frac{3}{4}e^2$, quindi l'equazione della retta tangente è:

$$y=(1-e)(x-e)+e-\frac{3}{4}e^2 \to y=(1-e)x+\frac{e^2}{4}.$$

2 La funzione $f(x)=\ln x$ interseca l'asse x in $A(1;0)$. Calcoliamo il coefficiente angolare della retta tangente al grafico di $f(x)$ in questo punto, cioè la derivata prima di $f(x)$ in $x=1$:

$$f'(x)=\frac{1}{x}\to f'(1)=1.$$

Indichiamo con $g(x)=kx^2-(6k+1)x+(5k+1)$ la funzione che descrive la parabola. Osserviamo che ciascuna parabola, al variare di k, passa per il punto A. Infatti:

$$g(1)=k-(6k+1)+(5k+1)=0.$$

Affinché le due curve siano tangenti in A è quindi sufficiente che il coefficiente angolare della retta tangente a $g(x)$ in A sia uguale a quello della tangente a $f(x)$ nello stesso punto, cioè che $f'(1)=g'(1)$. Abbiamo:

$$g'(x)=2kx-(6k+1)\to g'(1)=2k-6k-1=-4k-1.$$

Dalla condizione

$$f'(1)=g'(1)$$

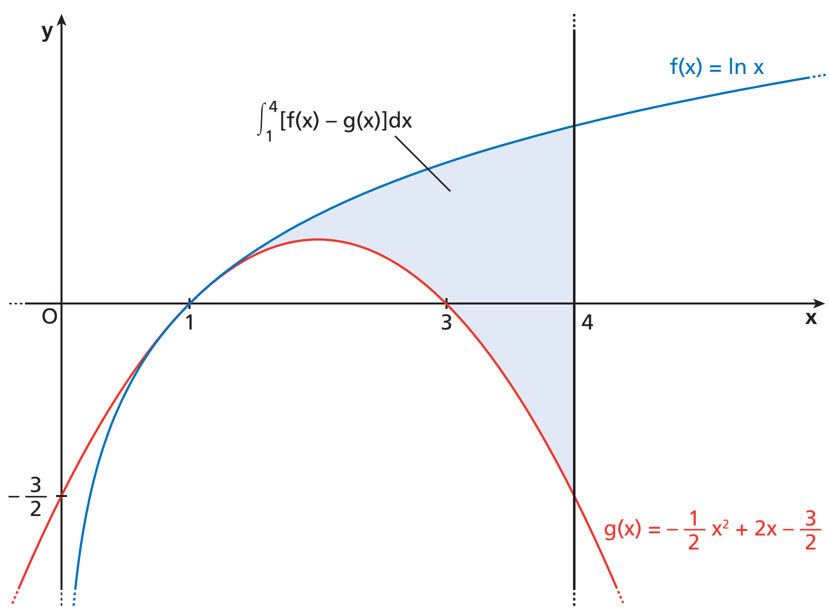
otteniamo:

$$-4k-1=1\to k=-\frac{1}{2}.$$

L'equazione della parabola è perciò

$$g(x)=-\frac{1}{2}x^2+2x-\frac{3}{2}.$$

Rappresentiamo graficamente $f(x)$ e $g(x)$.



Per determinare l'area compresa tra le due curve, osserviamo che nell'intervallo $[1;\ 4]$ è $f(x) \geq g(x)$, quindi:

$$S = \int_1^4 [f(x) - g(x)]dx = \int_1^4 \left[\ln x - \left(-\frac{1}{2}x^2 + 2x - \frac{3}{2}\right)\right]dx = \left[x(\ln x - 1) + \frac{x^3}{6} - x^2 + \frac{3}{2}x\right]_1^4 =$$

$$\left[x\ln x + \frac{x^3}{6} - x^2 + \frac{1}{2}x\right]_1^4 = \left[\left(4\ln 4 + \frac{32}{3} - 16 + 2\right) - \left(\frac{1}{6} - 1 + \frac{1}{2}\right)\right] = 4\ln 4 - 3.$$

3 **a.** L'asse della parabola coincide con l'asse y, quindi l'equazione della parabola è della forma $y = ax^2 + c$. Poiché la botte è alta 8 dm e il diametro di base è 5 dm, la parabola passa per il punto $\left(4;\ \frac{5}{2}\right)$; passa inoltre per il punto $(0;\ 3)$, come si può dedurre dai dati del problema e dalla figura. Imponiamo il passaggio per questi due punti per determinare i coefficienti a e c:

$$\begin{cases} \frac{5}{2} = 16a + c & \text{passaggio per } \left(4;\ \frac{5}{2}\right) \\ 3 = c & \text{passaggio per } (0;\ 3) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a = -\frac{1}{32} \\ c = 3 \end{cases}.$$

La parabola ha equazione $y = -\frac{x^2}{32} + 3$.

b. Il volume della botte è:

$$V = \pi \int_{-4}^{4} \left(-\frac{x^2}{32} + 3\right)^2 dx.$$

Poiché la funzione integranda è pari, abbiamo:

$$V = 2\pi \int_0^4 \left(-\frac{x^2}{32} + 3\right)^2 dx = 2\pi \int_0^4 \left(\frac{x^4}{2^{10}} - \frac{3x^2}{2^4} + 9\right)dx = 2\pi\left[\frac{x^5}{5 \cdot 2^{10}} - \frac{3x^3}{3 \cdot 2^4} + 9x\right]_0^4 =$$

$$2\pi\left(\frac{2^{10}}{5 \cdot 2^{10}} - \frac{3 \cdot 2^6}{3 \cdot 2^4} + 9 \cdot 4\right) = 2\pi\left(\frac{1}{5} - 4 + 36\right) = \frac{322\pi}{5} \simeq 202 \text{ L}.$$

4 Dall'espressione analitica di $f''(x)$ possiamo ricavare quella di $f'(x)$, che è una sua primitiva. Calcoliamo l'integrale indefinito di $f''(x)$:

$$f'(x) = \int f''(x)dx = \int \frac{2x^2 - 1}{x^2} dx = \int \left(2 - \frac{1}{x^2}\right)dx = 2x + \frac{1}{x} + c.$$

Per ricavare c osserviamo dal grafico che $f'(1) = 4$, quindi:

$$2 + 1 + c = 4 \rightarrow c = 1.$$

L'espressione analitica di $f'(x)$ è perciò $f'(x) = 2x + \frac{1}{x} + 1$.

Per ottenere $f(x)$ procediamo allo stesso modo, calcolando l'integrale indefinito di $f'(x)$:

$$f(x) = \int f'(x)dx = \int\left(2x + \frac{1}{x} + 1\right)dx = x^2 + \ln|x| + x + c.$$

Dal grafico ricaviamo $f(1) = 2$, quindi:

$$1 + \ln 1 + 1 + c = 2 \rightarrow c = 0.$$

Concludiamo che $f(x) = x^2 + \ln|x| + x$.

5 Osserviamo innanzitutto che per $a = 0$ la funzione assegnata diventa $y = x^2$ e, quindi, rappresenta una parabola priva di punto di massimo relativo.
Esaminiamo la situazione per $a \neq 0$.

La derivata prima della funzione assegnata è:

$$y' = 2xe^{ax} + x^2 a e^{ax} = (ax^2 + 2x)e^{ax}.$$

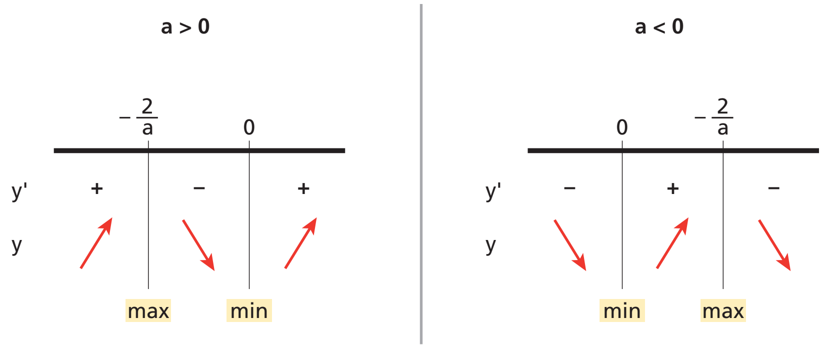
Studiamo il segno:

$$y' > 0 \to (ax^2 + 2x)e^{ax} > 0.$$

Poiché $e^{ax} > 0\ \forall a, \forall x$ risolviamo

$$ax^2 + 2x > 0 \to x(ax + 2) > 0.$$

Se $a \neq 0$, l'equazione $x(ax+2) = 0$ ha due soluzioni: $x = 0$ e $x = -\frac{2}{a}$. Compiliamo il quadro dei segni, distinguendo i casi $a > 0$ e $a < 0$.



In entrambi i casi il massimo si ha in corrispondenza di $x = -\frac{2}{a}$. Il punto di massimo che descrive γ, al variare di $a \neq 0$, è quindi $P\left(-\frac{2}{a}; \frac{4}{a^2}e^{-2}\right)$. Per determinare l'equazione del luogo descritto da P, eliminiamo il parametro a dal seguente sistema:

$$\begin{cases} x = -\dfrac{2}{a} \\ y = \dfrac{4}{a^2}e^{-2} \end{cases}.$$

Osserviamo che, al variare di $a \neq 0$, $x = -\frac{2}{a}$ assume tutti i valori reali diversi da 0. Quindi il dominio di γ è $x \neq 0$. Dalla prima equazione possiamo allora ricavare $a = -\frac{2}{x}$. Sostituendo nella seconda equazione otteniamo:

$$y = \frac{4}{\frac{4}{x^2}}e^{-2} = e^{-2}x^2.$$

Quindi γ ha equazione $y = e^{-2}x^2$, con $x \neq 0$, e rappresenta una parabola privata del vertice.

Abbiamo già visto, studiando il segno della derivata prima di λ, che $x = 0$ è un punto di minimo della funzione quando $a \neq 0$. Questo è anche un minimo assoluto: infatti, in $x = 0$ abbiamo $y = 0$, mentre se $x \neq 0$ allora $x^2 > 0$ e $e^{ax} > 0$, da cui $y = x^2 e^{ax} > 0$. Per $a = 0$, λ è descritta da $y = x^2$ e, quindi, è una parabola che presenta in $x = 0$ il punto di minimo assoluto.

6 **a.** Sostituiamo l'espressione data nei due membri dell'equazione differenziale. Il primo membro diventa:

$$T'(t) = -\frac{6}{5}Ce^{-\frac{6}{5}t}.$$

Il secondo membro è invece:

$$-\frac{6}{5}[T(t) - 25] = -\frac{6}{5}\left[25 + Ce^{-\frac{6}{5}t} - 25\right] = -\frac{6}{5}Ce^{-\frac{6}{5}t}.$$

I due membri sono uguali, quindi $T(t) = 25 + Ce^{-\frac{6}{5}t}$ è soluzione dell'equazione differenziale data.

b. Se $T(0) = 36,5$ °C allora, sostituendo $t = 0$ nell'espressione analitica di $T(t)$, otteniamo:

$$25 + C = 36,5 \rightarrow C = 11,5\ °\mathrm{C}.$$

Quindi $T(t) = 25 + 11,5e^{-\frac{6}{5}t}$.

c. Dobbiamo risolvere l'equazione $T(t) = 30$. Utilizziamo l'espressione analitica trovata nel punto precedente:

$$25 + 11,5e^{-\frac{6}{5}t} = 30 \rightarrow e^{-\frac{6}{5}t} = \frac{5}{11,5} \rightarrow -\frac{6}{5}t = \ln\left(\frac{10}{23}\right) \rightarrow t = -\frac{5}{6}\ln\left(\frac{10}{23}\right) \simeq 0,694.$$

Poiché il tempo t è misurato in ore, abbiamo $0,694\ \mathrm{h} = 0,694 \cdot 60\ \mathrm{min} \simeq 42\ \mathrm{min}$. Si può quindi stimare che il decesso sia avvenuto 42 minuti prima del ritrovamento, cioè alle ore 1:18.

7 La funzione passa per l'origine, quindi $f(0) = 0$, da cui:

$$h(0)e^{-kh(0)} = 0.$$

Poiché $e^{-kh(0)} \neq 0$, deve essere $h(0) = 0$, da cui $c = 0$.

La funzione è simmetrica rispetto all'asse y, cioè è pari, dunque deve essere $b = 0$.

La funzione cercata è allora del tipo $f(x) = ax^2e^{-kax^2}$.

La derivata prima è $f'(x) = 2ax(1 - kax^2)e^{-kax^2}$. Poiché in $x = 7$ abbiamo un punto di massimo, deve essere $f'(7) = 0$. Per determinare i coefficienti a e k imponiamo il passaggio per il punto (7; 2) e la condizione $f'(7) = 0$:

$$\begin{cases} 49ae^{-49ka} = 2 \\ 14a(1 - 49ka)e^{-49ka} = 0 \end{cases}.$$

Osserviamo che deve essere $a \neq 0$, altrimenti la funzione sarebbe identicamente nulla. Dalla seconda equazione, poiché $14ae^{-49ka} \neq 0$, ricaviamo:

$$1 - 49ka = 0 \rightarrow ka = \frac{1}{49}.$$

Sostituendo nella prima equazione, otteniamo:

$$49ae^{-1} = 2 \rightarrow a = \frac{2e}{49}.$$

La funzione cercata è:

$$f(x) = \frac{2e}{49}x^2e^{-\frac{x^2}{49}}.$$

8 Il punto di tangenza fra la sfera e la retta coincide con il punto di intersezione fra la retta e il piano perpendicolare alla retta passante per il centro della sfera. Determiniamo dunque l'equazione del piano β perpendicolare a r e passante per C. Ricordiamo che i coefficienti direttivi della retta r sono anche i coefficienti dell'equazione cartesiana di ciascuno dei piani perpendicolari alla retta stessa. Pertanto il generico piano ortogonale a r ha equazione:

$$2x + 2y - z = k.$$

Imponiamo la condizione di passaggio per C. Sostituendone le coordinate nell'equazione precedente, otteniamo:

$$k = 2 \cdot 1 + 2 \cdot 2 - (-1) = 7.$$

Quindi il piano cercato è β: $2x + 2y - z = 7$.

Scriviamo le equazioni della retta r in forma parametrica:

$$\begin{cases} \dfrac{x+2}{2} = t \\ \dfrac{y-2}{2} = t \\ \dfrac{z-2}{-1} = t \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x+2 = 2t \\ y-2 = 2t \\ z-2 = -t \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = -2+2t \\ y = 2+2t \\ z = 2-t \end{cases}, \quad \text{con } t \in \mathbb{R}.$$

Per trovare le coordinate del punto T di tangenza, sostituiamo nell'equazione del piano β le relazioni delle equazioni parametriche di r:

$$2(-2+2t)+2(2+2t)-(2-t) = 7 \rightarrow t = 1.$$

Sostituiamo $t = 1$ nelle equazioni parametriche di r:

$$\begin{cases} x = -2+2 = 0 \\ y = 2+2 = 4 \\ z = 2-1 = 1 \end{cases}.$$

Il punto di tangenza è perciò $T(0; 4; 1)$ e il raggio della sfera è $r = \overline{CT} = \sqrt{1+4+4} = 3$.

La sfera cercata ha equazione:

$$(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 9.$$

La distanza tra il centro C della sfera e il piano α: $x - 2y - 2z - 8 = 0$ è:

$$d = \frac{|1 - 2 \cdot 2 - 2 \cdot (-1) - 8|}{\sqrt{1+4+4}} = 3,$$

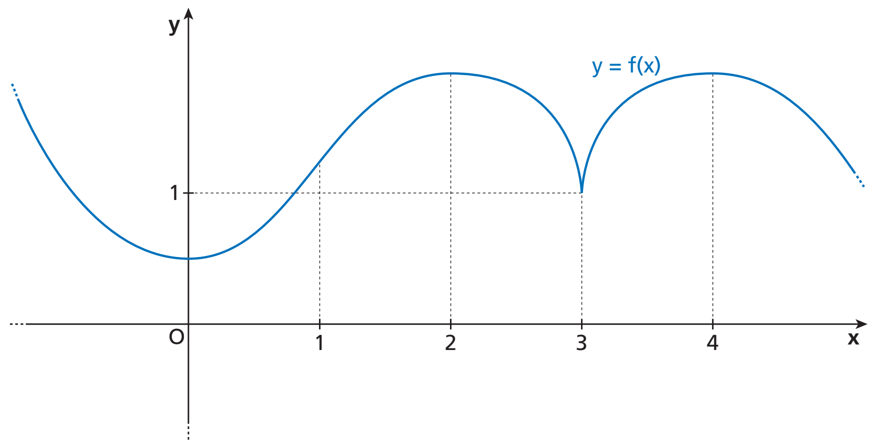
cioè è pari al raggio della sfera. Pertanto la sfera è tangente al piano α.

9 Dal grafico ricaviamo che $f'(x)$ è negativa negli intervalli $]-\infty; 0[$, $]2; 3[$ e $]4; +\infty[$: in questi intervalli $f(x)$ è decrescente. $f'(x)$ è invece positiva in $]0; 2[$ e $]3; 4[$, quindi in questi intervalli $f(x)$ è crescente. Perciò, ricordando che $f(x)$ è continua in $\mathbb{R}$, $x = 0$ e $x = 3$ sono punti di minimo relativo, $x = 2$ e $x = 4$ punti di massimo relativo.

Osserviamo che nel punto $x = 1$ la derivata prima ha un massimo relativo, quindi $f(x)$ ha un flesso in $x = 1$.

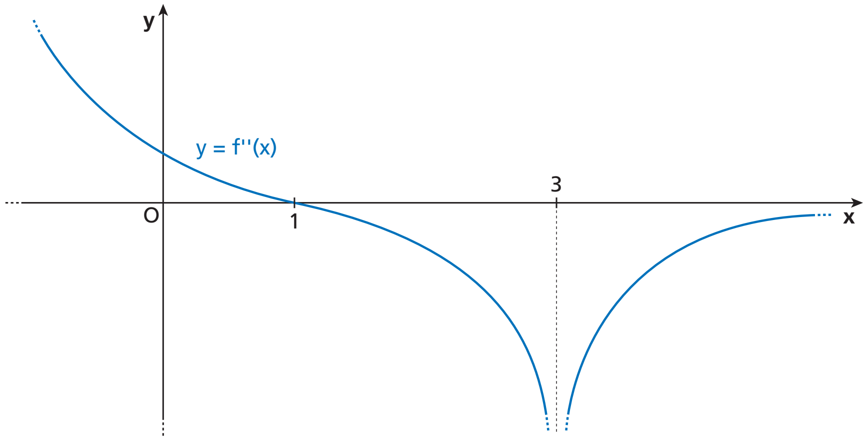
Inoltre, poiché $\lim_{x \to 3^-} f'(x) = -\infty$, $\lim_{x \to 3^+} f'(x) = +\infty$ e $f(x)$ è continua in tutto $\mathbb{R}$ (in particolare $f(3) = 1$), in $x = 3$ la funzione presenta una cuspide.

Tracciamo un possibile grafico di $f(x)$.



La funzione $f'(x)$ è crescente in $]-\infty; 1[$: in questo intervallo $f''(x)$ sarà positiva. $f'(x)$ è decrescente in $]1; 3[$ e in $]3; +\infty[$, quindi $f''(x)$ sarà negativa in questi intervalli. Osservando il comportamento di $f'(x)$ in un intorno di 3 ricaviamo anche $\lim_{x \to 3} f''(x) = -\infty$.

Inoltre $f'(x)$ presenta un massimo relativo in $x = 1$, quindi $f''(1) = 0$.
Tracciamo un possibile grafico di $f''(x)$.



10 Indichiamo con p la probabilità che un lettore MP3 funzioni e con q la probabilità che non funzioni: abbiamo $p = 0,95$ e $q = 0,05$.

L'evento A si verifica se i primi 8 lettori funzionano e gli ultimi due non funzionano:

$$p(A) = p^8 q^2 = (0,95)^8 \cdot (0,05)^2 \simeq 1,66 \cdot 10^{-3}.$$

L'evento contrario di B è $\overline{B}$ = «tutti i 10 lettori funzionano», quindi:

$$p(\overline{B}) = p^{10} \rightarrow p(B) = 1 - p(\overline{B}) = 1 - p^{10} = 1 - (0,95)^{10} \simeq 0,401 = 40,1\%.$$

L'evento C si verifica se funzionano 8, 9 o 10 lettori. Utilizziamo lo schema delle prove ripetute:

$$p(C) = \binom{10}{8} p^8 q^2 + \binom{10}{9} p^9 q + \binom{10}{10} p^{10} \simeq 0,988 = 98,8\%.$$