# L'algebra delle derivate



## Derivata di $k f(x)$

$$D\left(k f(x)\right) = \lim_{h \to 0} \frac{k f(x+h) - k f(x)}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} k \cdot \frac{f(x+h) - f(x)}{h} =$$

$$= k \cdot \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = k \cdot D f(x)$$

Le costanti moltiplicative si possono "portare fuori" dal simbolo di derivata.

Esempio

$$D(3 \sin x) = 3 D \sin x = 3 \cos x$$

## Derivata della somma di funzioni

$$D\left(f(x) + g(x)\right) = D f(x) + D g(x)$$

La derivata della somma è uguale alla somma delle derivate, infatti:

$$D\left(f(x)+g(x)\right) =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)+g(x+h)-f(x)-g(x)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} + \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h)-g(x)}{h} =$$

$$= D\,f(x) + D\,g(x)$$

Questo teorema vale anche per un numero qualsiasi di funzioni.

Esempio

$$D\left(x^2+\ln x\right) = 2x + \frac{1}{x}$$

Derivata del prodotto di funzioni

$$D\left(f(x)\cdot g(x)\right) = f'(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot g'(x)$$

Si tratta della regola di Leibniz. La dimostrazione è la seguente:

$$D\left(f(x)\cdot g(x)\right) =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)\cdot g(x+h) - f(x)\cdot g(x)}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)\cdot g(x+h) - f(x+h)\, g(x) +}{h}$$

$$\frac{+ f(x+h)\cdot g(x) - f(x)\cdot g(x)}{h} =$$

(si è aggiunto e tolto il termine $f(x+h)\cdot g(x)$ )

$$= \lim_{h \to 0} f(x+h)\cdot \frac{g(x+h) - g(x)}{h} +$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}\cdot g(x) =$$

$$= f(x)\cdot D\, g(x) + D\, f(x)\cdot g(x)$$

Esempio

$$D\,(x \cdot \sin x) = Dx \cdot \sin x + x \cdot D\sin x =$$
$$= 1 \cdot \sin x + x \cdot \cos x = \sin x + x\cos x$$

Derivata del reciproco di $f(x)$

$$D\,\frac{1}{f(x)} = -\frac{1}{f^2(x)} \cdot f'(x)\,, \text{ infatti}$$

$$D\,\frac{1}{f(x)} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{f(x+h)} - \frac{1}{f(x)}}{h} =$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(x) - f(x+h)}{h \cdot f(x+h)\,f(x)} = -\frac{f'(x)}{f^2(x)}$$

Esempio

$$D\,\frac{1}{\sin x} = -\frac{\cos x}{\sin^2 x}$$

Derivata del rapporto di due funzioni

$$D\,\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}$$

Questa formula si può dimostrare in modo diretto, usando cioè la definizione di derivata, oppure utilizzando i due teoremi precedenti.

In quest'ultimo caso si può scrivere

$$D\,\frac{f(x)}{g(x)} = D\left(f(x)\cdot\frac{1}{g(x)}\right) =$$

$$= f'(x)\cdot\frac{1}{g(x)} + f(x)\cdot D\left(\frac{1}{g(x)}\right) =$$

$$= f'(x)\cdot\frac{1}{g(x)} + f(x)\cdot\left(-\frac{g'(x)}{g^2(x)}\right) =$$

$$= \frac{f'(x)\cdot g(x) - f(x)\cdot g'(x)}{g^2(x)}$$

Esempio

$$D\tan x = D\,\frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\cos x\cdot\cos x + \sin x\cdot\sin x}{\cos^2 x} =$$

$$= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

# Derivate delle funzioni composte



Data la funzione composta $y = f(g(x))$, composizione delle funzioni $f$ e $g$, la derivata è, per definizione:

$$D\, f(g(x)) = \lim_{h \to 0} \frac{f(g(x+h)) - f(g(x))}{h}$$

Definendo la nuova variabile $t = g(x)$, ponendo $g(x+h) = g(x) + k$, e considerando che $k \to 0$ per $h \to 0$, si può riscrivere la derivata nella forma:

$$D\, f(g(x)) = \lim_{h \to 0} \frac{f(g(x+h)) - f(g(x))}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(t+k) - f(t)}{k} \cdot \frac{k}{h} =$$

$$= \lim_{k \to 0} \frac{f(t+k) - f(t)}{k} \cdot \lim_{h \to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} =$$

$$= f'(t) \cdot g'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

La derivata di una funzione composta è il prodotto tra la derivata della funzione "esterna", calcolata sulla funzione "interna", per la derivata della funzione interna.

Esempi

1) $D \sin x^2 = \cos x^2 \cdot 2x = 2x \cos x^2$

In questo caso la funzione più interna (la prima che si calcola) è $x^2$, la più esterna è $\sin x$.

2) $D \sin^2 x = 2 \sin x \cdot \cos x$

In questo caso la funzione più interna è $\sin x$ mentre la più esterna è $x^2$.

## Derivata della funzione inversa

La funzione inversa $f^{-1}(x)$, per definizione, è tale che $f(f^{-1}(x)) = x$

Dal teorema di derivazione delle funzioni composte si ha:

$$D\, f(f^{-1}(x)) = f'(f^{-1}(x)) \cdot D f^{-1}(x) = D x = 1$$

da cui si ottiene :

$$D f^{-1}(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

Esempi

1) Per calcolare la derivata di $y = \sqrt{x}$ si può considerare $\sqrt{x}$ come la funzione inversa di $x^2$ :

$$f(x) = x^2 , \quad f^{-1}(x) = \sqrt{x} ,$$

infatti $f(f^{-1}(x)) = (\sqrt{x})^2 = x$ .

Dalla formula ottenuta :

$$D\sqrt{x} = \frac{1}{D x^2 \big|_{\sqrt{x}}} = \frac{1}{2x \big|_{\sqrt{x}}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

2) $$D \arcsin x = \frac{1}{D \sin x \big|_{\arcsin x}} =$$

$$= \frac{1}{\cos(\arcsin x)} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2(\arcsin x)}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$