Derivate delle funzioni elementari

Data una funzione $y = f(x)$ la sua derivata nel punto x_0 è il limite:

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = D f(x)\Big|_{x = x_0}$$

In alternativa, ponendo $x - x_0 = h$, si può anche scrivere:

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = D f(x)\Big|_{x = x_0}$$

L'espressione $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ (o anche la $\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{x - x_0}$) è detta rapporto incrementale della funzione $f(x)$.

Utilizzando la definizione si possono calcolare le derivate delle funzioni elementari:

1) funzione costante: $y = k$

$$y' = \lim_{h \to 0} \frac{k - k}{h} = 0$$

La derivata di una costante è zero.

2) potenze: $y = x^n$

Alcuni casi particolari:

$y = x \quad (n=1)$, $\quad y' = \lim_{h \to 0} \frac{x+h-x}{h} = 1$

$y = x^2 \quad (n=2)$,

$$y' = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{2xh + h^2}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} (2x + h) = 2x$$

$y = x^3 \quad (n=3)$,

$$y' = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^3 - x^3}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{3x^2 h + 3xh^2 + h^3}{h} = 3x^2$$

In generale per $y = x^n$:

$$y' = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{x^n + n x^{n-1} h + \dots + h^n - x^n}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{n x^{n-1} h + \dots + h^n}{h} = n x^{n-1}$$

Esempio

La funzione derivata della funzione

$y = x^7$ è $y' = 7x^6$.

La formula dimostrata per n intero vale anche per $y = x^\alpha$ con α reale:

$$y' = \alpha\, x^{\alpha - 1}$$

Esempio

$$y = \sqrt{x}, \quad y' = D\sqrt{x} = D\, x^{1/2} = \frac{1}{2}\, x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

3) Sinusoide : $y = \sin x$

$$y' = D \sin x = \lim_{h \to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\sin x \cos h + \sin h \cos x - \sin x}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\sin x(\cos h - 1) + \sin h \cos x}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \left(\sin x \cdot \frac{\cos h - 1}{h} + \frac{\sin h}{h} \cos x \right) = \cos x$$

In modo simile si trova $D \cos x = -\sin x$

4) Logaritmo: $y = \ln x$

$$y' = D \ln x = \lim_{h \to 0} \frac{\ln(x+h) - \ln x}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\ln \frac{x+h}{x}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\ln\left(1+\frac{h}{x}\right)}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \ln\left(1+\frac{h}{x}\right)^{\frac{1}{h}} = \text{ponendo } \frac{1}{h} = t$$

$$= \lim_{t \to \infty} \ln\left(1+\frac{1}{xt}\right)^{t} = \ln e^{\frac{1}{x}} = \frac{1}{x}$$

5) esponenziale: $y = e^x$

$$y' = D e^x = \lim_{h \to 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} e^x \frac{(e^h - 1)}{h} = \text{ponendo } e^h - 1 = t$$

$$= \lim_{t \to 0} e^x \frac{t}{\ln(1+t)} = \text{ponendo } \frac{1}{t} = z$$

$$= \lim_{z \to \infty} e^x \frac{1}{\ln\left(1+\frac{1}{z}\right)^z} = e^x$$