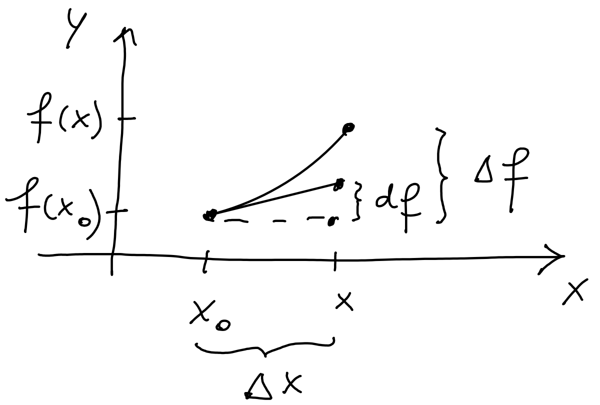
Differenziale di una funzione



Il differenziale è l'incremento calcolato sulla retta tangente anziché sulla curva che rappresenta la funzione $f(x)$.

Quindi $df = f'(x_0)\,\Delta x$

Per Δx piccoli il differenziale approssima l'incremento della funzione.

Più Δx è piccolo e migliore è l'approssimazione.

Esempi

- Il differenziale di $f(x)=x$ nel punto x è $dx = \Delta x$, quindi si può anche scrivere

$$df = f'(x)\,dx$$

- Il differenziale di $f(x)=x^2$ nel punto x è $df = f'(x)\,dx$, $dx^2 = 2x\,dx$

La derivata di una funzione si può quindi scrivere come il rapporto tra il differenziale df della funzione e il differenziale dx della variabile indipendente:

$$f'(x) = \frac{df}{dx}$$

Questa è la notazione introdotta da Leibniz nel 1684 e da lui usata per ricavare le regole del calcolo delle derivate.

Per esempio, per ricavare la regola di derivazione del prodotto di due funzioni Leibniz ragionava così (in termini di differenziali):

$$d(f \cdot g) = f(x+dx) \cdot g(x+dx) - f(x) \cdot g(x) =$$

$$= (f(x) + df) \cdot (g(x) + dg) - f(x) \cdot g(x) =$$

$$= (f(x) + f'(x)\,dx) \cdot (g(x) + g'(x)\,dx) - f(x) \cdot g(x) =$$

$$= \cancel{f(x)g(x)} + f'(x)g(x)\,dx + f(x)g'(x)\,dx +$$

$$+ \cancel{f'(x)g'(x)(dx)^2} - \cancel{f(x)g(x)} =$$

$$= (f'(x)g(x) + f(x)g'(x))\,dx$$

Trascurando il termine che contiene l'infinitesimo $(dx)^2$ (infinitesima parte di un infinitesimo) si ottenera quindi:

$$\frac{d(f \cdot g)}{dx} = f' g + f \cdot g'$$

Esempi

1) Usiamo i differenziali per ottenere un'approssimazione lineare di una funzione in prossimità di un punto x_0:

$$f(x) \simeq f(x_0) + df = f(x_0) + f'(x_0)\, dx =$$

$$= f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

Applichiamo questa formula per ottenere ad esempio una approssimazione lineare della funzione $\frac{1}{\sqrt{1-x}}$ in prossimità di $x_0 = 0$:

$$x_0 = 0, \quad f(0) = 1, \quad f'(x) = -\frac{-\frac{1}{2\sqrt{1-x}}}{1-x} = \frac{1}{2\sqrt{(1-x)^3}}$$

quindi $f'(0) = \frac{1}{2}$.

Si ottiene allora:

$$f(x) = f(0) + f'(0) \cdot (x - 0)$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-x}} \simeq 1 + \frac{1}{2}x$$

In effetti se x è piccolo, cioè $x \ll 1$, si può verificare con una calcolatrice che l'approssimazione è buona.

2) Calcola un valore approssimato di $\sqrt{37}$.

Consideriamo la funzione $f(x) = \sqrt{36+x}$ e approssimiamola, per x piccolo, usando il differenziale:

$x_0 = 0$, $f(0) = 6$, $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{36+x}}$,

$f'(0) = \dfrac{1}{12}$, quindi $\sqrt{37} \simeq 6 + \dfrac{1}{12} \cdot 1 = 6{,}083$

Con la calcolatrice si ottiene $\sqrt{37} \simeq 6{,}0827$.

Per le radici di tutti i numeri prossimi a 36 si può scrivere:

$$\sqrt{36+x} \simeq 6 + \frac{1}{12}x$$