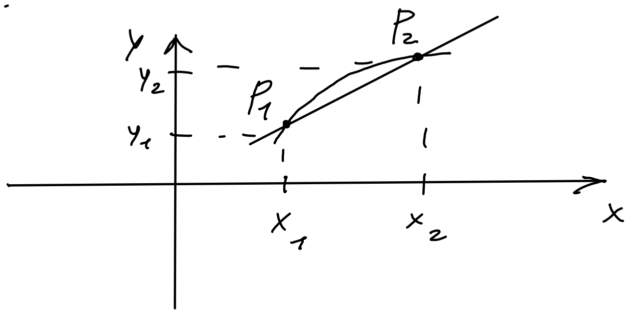
Derivate

Nelle scienze si studiano grandezze in relazione ad altre grandezze.
Per esempio la posizione in funzione del tempo o la temperatura in funzione dell'altitudine.
E' importante sapere quanto rapidamente varia una grandezza in funzione dell'altra.
La velocità media fornisce una prima indicazione:



E' relativa ad un intervallo ed è la pendenza della retta che collega i punti P_1 e P_2.

Se si calcola il limite

$$\lim_{x_2 \to x_1} \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

si ottiene la pendenza della tangente alla curva nel punto di ascissa x_1.

Quest'ultima è, per definizione, la derivata di y fatta rispetto ad x calcolata nel punto x_1, in simboli:

$$y'(x_1) = \lim_{x_2 \to x_1} \frac{y(x_2) - y(x_1)}{x_2 - x_1}$$

Esempi

1) Nel caso di una retta, per esempio quella di equazione $y = 2x + 1$, la pendenza è costantemente uguale a 2 e la derivata in qualsiasi punto dovrà valere 2.

Scegliendo per esempio $x_1 = 0$ si ottiene:

$$y'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{y(x) - y(0)}{x - 0} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{2x + 1 - 1}{x} = 2$$

Scegliendo $x_1 = 1$ si ha ancora:

$$y'(1) = \lim_{x \to 1} \frac{2x + 1 - 3}{x - 1} =$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{2(x - 1)}{x - 1} = 2$$

2) Nel caso di una parabola la pendenza della tangente varia da punto a punto. Calcolando la derivata in punti diversi si ottengono quindi valori diversi.

Consideriamo la parabola di equazione

$$y = x^2$$

La pendenza della tangente nel punto di ascissa $x = 0$ vale:

$$y'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{y(x) - y(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{x^2}{x} = 0$$

Infatti la tangente alla parabola nell'origine è orizzontale (l'asse delle ascisse). La pendenza della tangente in x_1 invece vale:

$$y'(x_1) = \lim_{x \to 1} \frac{y(x) - y(1)}{x - 1} =$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \to 1} (x + 1) = 2$$

Generalizzando si può calcolare la pendenza della parabola in un punto qualunque x_0 della curva:

$$y'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{y(x) - y(x_0)}{x - x_0} =$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{x^2 - x_0^2}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} (x + x_0) = 2x_0$$

La funzione che si ottiene in questo modo è detta funzione derivata.

Si dice per esempio che la funzione derivata o, più brevemente, la derivata della funzione $y(x) = x^2$ è la funzione $y'(x) = 2x$.

Conoscendo la funzione derivata è possibile calcolare la pendenza della tangente alla curva in un punto qualsiasi.

Per esempio, nel punto di ascissa 2 la pendenza della tangente alla parabola è 4, infatti, sostituendo nella funzione derivata:

$$y'(2) = 2 \cdot 2 = 4$$