Esercizi

1) (Teorema di Lagrange)

Verifica se la funzione $f(x) = \ln(x+2)$ soddisfa le ipotesi del teorema di Lagrange nell'intervallo $[-1, 2]$. Trova eventualmente i punti di cui parla il teorema.

La funzione $\ln(x+2)$ è definita per $x+2>0$, cioè per $x>-2$.
Nel dominio è continua e derivabile (è la curva logaritmo traslata a sinistra di due unità).
Sono verificate allora le condizioni del teorema di Lagrange e quindi esiste un punto c tale che $f'(c) = \dfrac{f(b) - fa}{b-a}$,

$f'(x) = \dfrac{1}{x+2}$, da cui $\dfrac{1}{c+2} = \dfrac{\ln 4 - \ln 1}{2+1}$

si ottiene $c = \dfrac{3}{\ln 4} - 2 \simeq 0,164$ che in effetti appartiene all'intervallo $[-1, 2]$.

2) (Funzioni crescenti e decrescenti) ②

Trova, all'interno del dominio, gli intervalli in cui la funzione $f(x) = x \ln^2 x$ è crescente o decrescente.

Il dominio della funzione è $x > 0$.

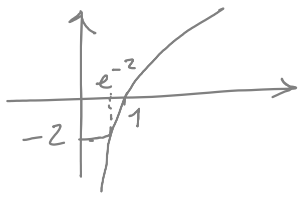
La derivata prima è: $f'(x) = \ln^2 x + x \cdot 2 \ln x \cdot \frac{1}{x}$

$f'(x) = \ln^2 x + 2 \ln x = \ln x (\ln x + 2)$

studio il segno della derivata prima:

$\ln x > 0$ per $x > 1$,

$\ln x + 2 > 0$ per $\ln x > -2$, $x > e^{-2}$



$\ln x$: 0 $- -$ 1 $+ + + + +$ x

$\ln x + 2$: 0 $- -$ e^{-2} $+ + + + + +$ x

$f'(x)$: 0 $+ +$ e^{-2} $- -$ 1 $+ + + + + + +$ x

La funzione è crescente in $]0, e^{-2}]$,

decrescente in $[e^{-2}, 1]$ e nuovamente crescente per $x > 1$.

3) (Teorema di Cauchy)

Verifica se le funzioni $f(x) = \sin x - 1$ e $g(x) = \cos x + 1$ verificano le ipotesi del teorema di Cauchy nell'intervallo $[0, \frac{\pi}{2}]$.

Le funzioni sono continue e derivabili in $[0, \frac{\pi}{2}]$ perché lo sono le funzioni $\sin x$ e $\cos x$.

La derivata $g'(x)$ non si annulla in $]0, \frac{\pi}{2}[$, infatti $g'(x) = -\sin x$, che si annulla per $\sin x = 0$, $x = 0$ e $x = \pi$.

Dal teorema di Cauchy deve esistere $c \in]0, \frac{\pi}{2}[$ tale che

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)},$$

$$\frac{\cos c}{-\sin c} = \frac{0 - (-1)}{1 - 2}, \quad \tan c = 1, \quad c = \frac{\pi}{4},$$

che è interno all'intervallo $[0, \frac{\pi}{2}]$.

4) (Primo teorema di de L'Hôpital)

Calcola, con il primo teorema di de L'Hôpital, il seguente limite:

$$\lim_{x \to 0} \frac{(2x-1)^5 + 1}{x}$$

E' una forma indeterminata di tipo $\frac{0}{0}$

$$\lim_{x \to 0} \frac{5(2x-1)^4 \cdot 2}{1} = 10$$

5) (Secondo teorema di de L'Hôpital)

Calcolo il limite:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\ln(1+x^2)}{x}$$

E' una forma indeterminata di tipo $\frac{\infty}{\infty}$.

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\ln(1+x^2)}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{1}{1+x^2} \cdot 2x}{1} =$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{2x}{1+x^2} = 0$$

6) (Polinomi di Taylor)

Scrivi il polinomio di Taylor per la funzione $f(x) = \cos x \sin 2x$ con $x_0 = 0$ e $n = 3$.

Calcolo le derivate fino all' ordine 3:

$$f'(x) = -\sin x \cdot \sin 2x + \cos x \cdot \cos 2x \cdot 2 =$$

$$= 2\cos x \cos 2x - \sin x \sin 2x =$$

$$= 2\cos x(\cos^2 x - \sin^2 x) - \sin x \cdot 2\sin x \cos x =$$

$$= 2\cos^3 x - 2\cos x \sin^2 x - 2\cos x \cdot \sin^2 x =$$

$$= 2\cos^3 x - 4\cos x \sin^2 x$$

$$f'(0) = 2$$

$$f''(x) = 6\cos^2 x\,(-\sin x) + 4\sin x \cdot \sin^2 x +$$

$$- 4\cos x \cdot 2\sin x \cos x =$$

$$= -6\cos^2 x \sin x + 4\sin^3 x - 8\sin x \cos^2 x =$$

$$= 4\sin^3 x - 14\sin x \cos^2 x$$

$$f''(0) = 0$$

$$f'''(x) = 12\sin^2 x \cdot \cos x - 14\cos^3 x + 14\sin^2 x \cdot 2\cos x =$$

$$= 12\cos x \cdot \sin^2 x + 28\cos x \sin^2 x - 14\cos^3 x =$$

$$= 40\cos x \sin^2 x - 14\cos^3 x$$

$$f'''(0) = -14$$

Si ha poi $f(0) = 0$, quindi

$$f(x) \simeq f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3$$

$$\cos x \sin 2x \simeq 2x - \frac{7}{3}x^3$$