Esercizi sulle derivate

Tavola delle derivate fondamentali

$f(x)$	$f'(x)$	
k	0	
x^n	$n x^{n-1}$	(n naturale)
x^α	$\alpha x^{\alpha-1}$	(α reale)
a^x	$a^x \ln a$	
e^x	e^x	
$\log_a x$	$\dfrac{1}{x \ln a}$	
$\ln x$	$\dfrac{1}{x}$	
$\sin x$	$\cos x$	
$\cos x$	$-\sin x$	
$\tan x$	$\dfrac{1}{\cos^2 x}$	
$\cot x$	$-\dfrac{1}{\sin^2 x}$	
$\arcsin x$	$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	
$\arccos x$	$-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	
$\arctan x$	$\dfrac{1}{1+x^2}$	

Regole di derivazione

Teorema della somma

$$D\left(f(x)+g(x)\right) = f'(x) + g'(x)$$

Teorema del prodotto (regola di Leibniz)

$$D\left(f(x)\cdot g(x)\right) = f'(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot g'(x)$$

Teorema del quoziente

$$D\,\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(x)\cdot g(x) - f(x)\cdot g'(x)}{g^2(x)}$$

Teorema delle funzioni composte

$$D\,f\left(g(x)\right) = f'\left(g(x)\right)\cdot g'(x)$$

Teorema delle funzioni inverse

$$D\,f^{-1}(x) = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(x)\right)}$$

Funzioni iperboliche

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad , \quad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

$$D \sinh x = D \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh x$$

$$D \cosh x = D \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \sinh x$$

$$D \tanh x = D \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} =$$

$$= \frac{(e^x + e^{-x})(e^x + e^{-x}) - (e^x - e^{-x})(e^x - e^{-x})}{(e^x + e^{-x})^2} =$$

$$= \frac{\cancel{e^{2x}} + 2 + \cancel{e^{-2x}} - \cancel{e^{2x}} + 2 - \cancel{e^{-2x}}}{(e^x + e^{-x})^2} =$$

$$= \frac{4}{(e^x + e^{-x})^2} = \frac{1}{\cosh^2 x}$$

Inoltre si può verificare che vale la relazione $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$ che è l'equazione di un'iperbole nelle variabili $X = \cosh x$ e $Y = \sinh x$.

Questo giustifica il nome di funzioni iperboliche.

(Allo stesso modo le funzioni $\sin x$ e $\cos x$ sono chiamate funzioni circolari perché l'equazione $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ è l'equazione di una circonferenza nelle variabili $X = \cos x$ e $Y = \sin x$).

Esercizi

1) $y = x^4 (3x + 2)$

$y = 3x^5 + 2x^4$, $y' = 15x^4 + 8x^3$

2) $y = \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}$

$$y' = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}\cdot(\sqrt{x}-1) - \cancel{\sqrt{x}}\cdot\frac{1}{2\cancel{\sqrt{x}}}}{(\sqrt{x}-1)^2} =$$

$$= \frac{\frac{\cancel{\sqrt{x}}-1-\cancel{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}}{2(\sqrt{x}-1)^2} = -\frac{1}{2\sqrt{x}\,(\sqrt{x}-1)^2}$$

3) $y = \cos x \cdot \cos 2x$

$$y' = (-\sin x)\cdot\cos 2x + \cos x\cdot(-\sin 2x)\cdot 2 =$$

$$= -\sin x\cos 2x - 2\cos x\sin 2x =$$

$$= -\sin x(\cos^2 x - \sin^2 x) - 2\cos x(2\sin x\cos x) =$$

$$= -\sin x\cos^2 x + \sin^3 x - 4\sin x\cos^2 x =$$

$$= \sin^3 x - 5\sin x\cos^2 x =$$

$$= \sin^3 x - 5\sin x(1-\sin^2 x) =$$

$$= \sin^3 x - 5\sin x + 5\sin^3 x =$$

$$= 6\sin^3 x - 5\sin x$$

4) $y = \cos 2x \cdot (1 - \tan 2x)$

$$y' = -2\sin 2x \cdot (1 - \tan 2x) +$$

$$+ \cos 2x \cdot \left(-\frac{1}{\cos^2 2x} \cdot 2\right) =$$

$$= -2\sin 2x \cdot \left(1 - \frac{\sin 2x}{\cos 2x}\right) +$$

$$+ \cancel{\cos 2x} \cdot \left(-\frac{1}{\cos^{\cancel{2}} 2x} \cdot 2\right) =$$

$$= -2\sin 2x + 2\frac{\sin^2 2x}{\cos 2x} - \frac{2}{\cos 2x} =$$

$$= -2\sin 2x + 2\frac{\sin^2 2x - 1}{\cos 2x} =$$

$$= -2\sin 2x - 2\frac{\cos^{\cancel{2}} 2x}{\cancel{\cos 2x}} = -2(\sin 2x + \cos 2x)$$

5) $$y = \sin x \cos x - \frac{\tan x}{1+\tan^2 x}$$

$$\left[\sin x = \frac{2\tan\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}} \longrightarrow \sin 2x = \frac{2\tan x}{1+\tan^2 x} \right]$$

$$y = \sin x \cos x - \frac{\sin 2x}{2} = \sin x \cos x - \frac{\cancel{2}\sin x \cos x}{\cancel{2}} = 0$$

$$y' = 0$$

$$y = \sin x \cos x - \frac{\tan x}{1+\tan^2 x}$$

$$y' = \cos^2 x - \sin^2 x - \frac{\frac{1}{\cos^2 x}\cdot(1+\tan^2 x) - \tan x \cdot 2\tan x \cdot \frac{1}{\cos^2 x}}{(1+\tan^2 x)^2} =$$

$$= \cos^2 x - \sin^2 x - \frac{\frac{1}{\cos^2 x} + \frac{\tan^2 x}{\cos^2 x} - \frac{2\tan^2 x}{\cos^2 x}}{(1+\tan^2 x)^2} =$$

$$= \cos^2 x - \sin^2 x - \frac{1-\tan^2 x}{\cos^2 x\,(1+\tan^2 x)^2} =$$

$$= \cos 2x - \frac{\cos 2x}{\cos^2 x\,(1+\tan^2 x)} =$$

$$= \cos 2x - \frac{\cos 2x}{\cos^2 x + \sin^2 x} = 0$$

6) $$y = \sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}$$

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}} \cdot \frac{\sin x\,(1+\cos x) - (1-\cos x)(-\sin x)}{(1+\cos x)^2} =$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1+\cos x}{1-\cos x}} \cdot \frac{\sin x + \cancel{\sin x \cos x} + \sin x - \cancel{\sin x \cos x}}{(1+\cos x)^2} =$$

$$= \frac{1}{\cancel{2}}\sqrt{\frac{1+\cos x}{1-\cos x}} \cdot \frac{\cancel{2}\sin x}{(1+\cos x)^2} = \frac{\sin x}{\sqrt{(1-\cos x)(1+\cos x)^3}} =$$

$$= \frac{\sin x}{\sqrt{(1-\cos^2 x)(1+\cos x)^2}} = \frac{\sin x}{\sqrt{\sin^2 x \cdot (1+\cos x)^2}} = \frac{\sin x}{|\sin x| \cdot (1+\cos x)}$$

7) $$y = e^{3\ln(1-x)}$$

$$y = e^{\ln(1-x)^3} = (1-x)^3$$

1° modo) $$y' = 3(1-x)^2 \cdot (-1) = -3(1-x)^2$$

2° modo) $$y' = e^{3\ln(1-x)} \cdot 3\,\frac{1}{1-x} \cdot (-1) =$$

$$= (1-x)^{\cancel{3}\,2} \cdot \frac{-3}{\cancel{1-x}} = -3(1-x)^2$$

8) $$y = \operatorname{arcsinh} x$$

$$\cosh x = \sqrt{1+\sinh^2 x}$$

$$D \sinh x = \cosh x \quad , \quad \cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

$$y' = \frac{1}{D\sinh(\operatorname{arcsinh} x)} = \frac{1}{\cosh(\operatorname{arcsinh} x)} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1+\sinh^2(\operatorname{arcsinh} x)}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$D \operatorname{arcsinh} x = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \quad , \quad \left(D \arcsin x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \right)$$

$$D \operatorname{arccosh} x = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \quad ,$$

$$D \operatorname{arctanh} x = \frac{1}{1-x^2} = D \operatorname{arccotanh} x \quad (\text{perché?})$$

9)
$$y = e^{\tan(1+2x)}$$

$$y' = e^{\tan(1+2x)} \cdot \frac{1}{\cos^2(1+2x)} \cdot 2 = \frac{2e^{\tan(1+2x)}}{\cos^2(1+2x)}$$

10)
$$y = e^{\arctan x^2}$$

$$y' = e^{\arctan x^2} \cdot \frac{1}{1+(x^2)^2} \cdot 2x = \frac{2x e^{\arctan x^2}}{1+x^4}$$

11) $y = x^3 \cdot e^{\cos x}$

$$y' = 3x^2 e^{\cos x} + x^3 \cdot e^{\cos x}(-\sin x) =$$

$$= x^2 e^{\cos x}\left(3 - x \sin x\right)$$

Derivate di ordine superiore

Si ottengono derivando più volte una funzione.

Per esempio la derivata seconda si ottiene derivando due volte.

Esistono varie notazioni:

$$f''(x) = D f'(x) = f^{(2)}(x)$$

1) $y = x^4 - 3x^3 + x^2 \quad , \quad n = 4$

$$y' = 4x^3 - 9x^2 + 2x$$

$$y'' = 12x^2 - 18x + 2$$

$$y''' = 24x - 18$$

$$y'''' = 24$$

2) $y = \ln(x^2+1) \quad , \quad n = 3$

$$y' = \frac{1}{x^2+1} \cdot 2x = \frac{2x}{x^2+1}$$

$$y'' = \frac{2(x^2+1) - 2x(2x)}{(x^2+1)^2} = \frac{2 - 2x^2}{(x^2+1)^2}$$

$$y''' = \frac{-4x(x^2+1)^{\cancel{2}} - (2-2x^2)2\cancel{(x^2+1)}2x}{(x^2+1)^{\cancel{4}3}} =$$

$$= \frac{-4x^3 - 4x - 8x + 8x^3}{(x^2+1)^3} = \frac{4x^3 - 12x}{(x^2+1)^3}$$

3) Derivate successive di $f(x) = \sin x$

$f^{(1)}(x) = \cos x$

$f^{(2)}(x) = -\sin x$

$f^{(3)}(x) = -\cos x$

$f^{(4)}(x) = \sin x$

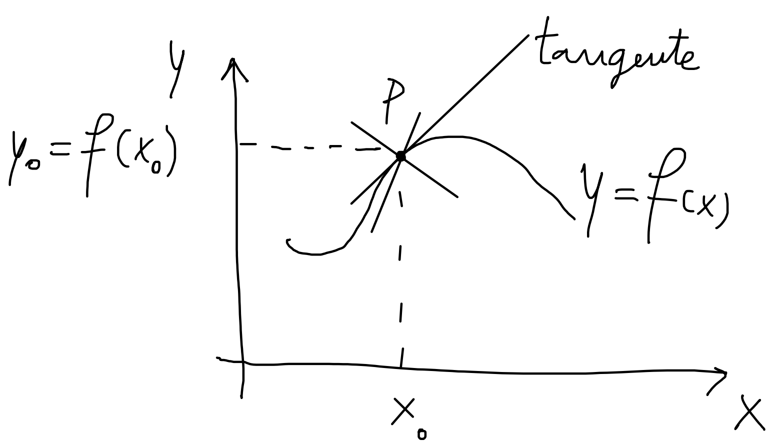
$f^{(5)}(x) = f^{(1)}(x) = \cos x$

$f^{(6)}(x) = f^{(2)}(x) = -\sin x$

– – –

– – –

L'equazione della retta tangente



$P(x_0, f(x_0))$

Il fascio di rette di centro P ha

equazione: $y - f(x_0) = m(x - x_0)$

L'equazione della tangente è:

$$y - f(x_0) = f'(x_0)\,(x - x_0)$$

oppure $$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

Esempio

Scrivi l'equazione della retta tangente alla curva di equazione $y = x^3 + 2x$ nel punto di ascissa $x_0 = 2$.

$y = f(x)$, $f(2) = 2^3 + 2 \cdot 2 = 8 + 4 = 12$

$f'(x) = 3x^2 + 2$, $f'(2) = 3 \cdot 2^2 + 2 = 14$

La tangente ha equazione:

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

$y = 14(x - 2) + 12$, $y = 14x - 16$