I teoremi di de L'Hôpital

Sono due teoremi che permettono di calcolare alcuni limiti di forme indeterminate.

Primo teorema

Se due funzioni $f(x)$ e $g(x)$ sono definite in un intorno I di x_0 (un insieme che contiene x_0) e soddisfano le condizioni:

1) $f(x)$ e $g(x)$ sono continue in x_0 e $f(x_0) = g(x_0) = 0$,

2) $f(x)$ e $g(x)$ sono derivabili in $I - \{x_0\}$,

3) $g'(x) \neq 0$ in $I - \{x_0\}$,

4) esiste $\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$,

allora esiste $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

Le ipotesi del teorema servono a garantire che, in tutto l'insieme $I - \{x_0\}$ le funzioni $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ e $\frac{f(x)}{g(x)}$ siano definite, continue e derivabili

Considerato un intervallo $[x_0, x]$ si può allora applicare il teorema di Cauchy alle due funzioni, determinando così un punto $c \in]x_0, x[$ tale che:

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \frac{f(x)}{g(x)}$$

(infatti $f(x_0) = g(x_0) = 0$)

Infine, passando al limite per $x \to x_0$, si ha: $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$,

infatti se $x \to 0$ anche $c \to 0$.

Esempi

1) $\lim\limits_{x \to 1} \frac{\ln x}{3x - 3}$

E' una forma indeterminata di tipo $\frac{0}{0}$.
Valgono le condizioni del 1° teorema di de L'Hôpital:

$f(x_0) = \ln 1 = 0$, $g(x_0) = 3 \cdot 1 - 3 = 0$,

$g'(x) = 3 \neq 0, \forall x$, quindi $\lim\limits_{x \to 1} \frac{\ln x}{3x-3} = \lim\limits_{x \to 1} \frac{\frac{1}{x}}{3} = \frac{1}{3}$

2) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2\sin x - x}{x^2}$, è una forma indeterminata di tipo $\frac{0}{0}$.

$f(0) = 0$, $g(0) = 0$, $g'(x) = 2x \neq 0$ per $x \neq 0$, quindi, per il primo teorema di de L'Hôpital:

$$\lim_{x \to 0} \frac{2\sin x - x}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{\overbrace{2\cos x - 1}^{\to 1}}{\underbrace{2x}_{\to 0}} = \infty$$

3) $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^2 - 2x - 3}{x^2 - 3x}$ è sempre una forma $\frac{0}{0}$.

Per il primo teorema di de L'Hôpital:

$$\lim_{x \to 3} \frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 - 3x} = \lim_{x \to 3} \frac{2x - 2}{2x - 3} = \frac{4}{3}$$

Secondo teorema

Siano $f(x)$ e $g(x)$ due funzioni definite in $I - \{x_0\}$ (con x_0 finito o infinito) con le proprietà che:

1) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = \infty$,

2) siano derivabili in I,

3) sia $g'(x) \neq 0$ in I,

4) esista $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$,

allora esiste anche $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ e

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

(Senza dimostrazione).

Esempi

1) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\ln x + 2x}{e^x + x}$ è una forma indeterminata di tipo $\frac{\infty}{\infty}$

per il secondo teorema di de L'Hôpital

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\ln x + 2x}{e^x + x} = \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{1}{x} + 2}{e^x + 1} = 0$$

2) $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{\ln x}{\cotan x}$

è una forma indeterminata di tipo $\frac{\infty}{\infty}$.

Per il secondo teorema di de L'Hôpital

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\ln x}{\cotan x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{\sin^2 x}} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\sin^2 x}{x} = 0$$

3) $$\lim_{x \to \infty} \frac{e^x + x}{e^x - 1} = \lim_{x \to \infty} \frac{e^x + 1}{e^x} = \lim_{x \to \infty} \frac{e^x}{e^x} = 1$$

(in questo caso si è applicato 2 volte il 2° teorema)