Massimi e minimi di una funzione

- Si dice che una funzione ha un punto di massimo relativo (o locale) in x_0 se esiste un intorno U di x_0 tale che $f(x) \leq f(x_0)$, $\forall x \in U - \{x_0\}$.

- Si dice che una funzione ha un punto di minimo relativo (o locale) in x_0 se esiste un intorno U di x_0 tale che $f(x) \geq f(x_0)$, $\forall x \in U - \{x_0\}$.

Una condizione necessaria per l'esistenza di un punto estremante x_0 (di massimo o di minimo), per una funzione derivabile $f(x)$, è che $f'(x_0) = 0$.

Criteri per la ricerca di punti estremanti

1° metodo: studio del segno della derivata

- Se in un intorno di x_0 si ha che

$$f'(x) \begin{cases} > 0 & \text{per } x < x_0 \\ < 0 & \text{per } x > x_0 \end{cases}$$

allora x_0 è un punto di massimo relativo

– Se in un intorno di x_0 si ha che

$$f'(x) \begin{cases} < 0 & \text{per } x < x_0 \\ > 0 & \text{per } x > x_0 \end{cases}$$

allora x_0 è un punto di minimo relativo

– Se $f'(x)$ ha segno costante allora x_0 non è punto né di massimo né di minimo.

Esempi

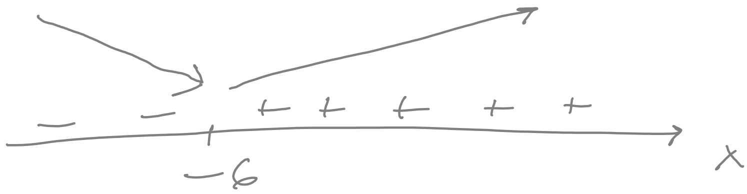
Determina i punti di massimo e minimo relativo delle seguenti funzioni

1) $y = x^4 + 8x^3 + 1$

La funzione è definita e derivabile in tutto $\mathbb{R}$.

$y' = 4x^3 + 24x^2$, $\quad y' = 4x^2(x+6)$

y' è positiva per $x > -6$.



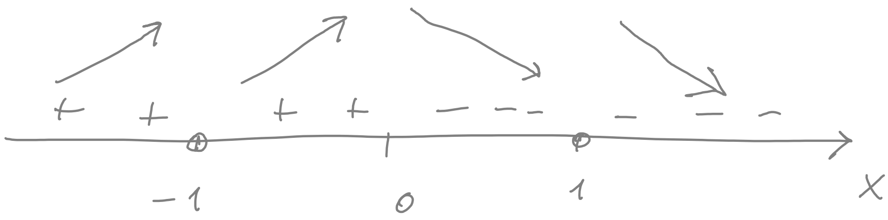
La funzione ha un punto di minimo relativo per $x = -6$: $m(-6, -431)$.

2) $y = \dfrac{1}{x^2 - 1}$

La derivata della funzione è:

$$y' = -\frac{2x}{(x^2-1)^2}$$

y' risulta negativa per $x > 0$ e positiva per $x < 0$ (per $x = \pm 1$ non è definita).



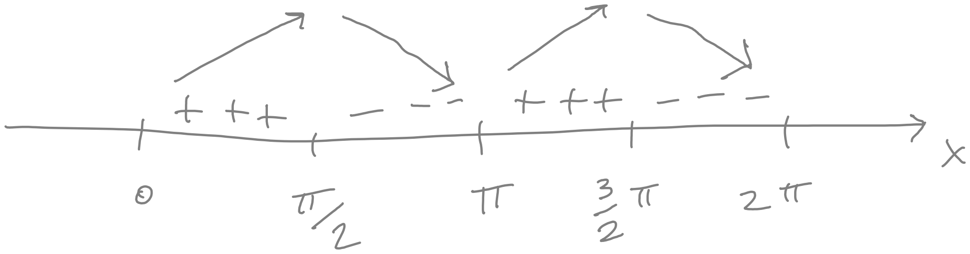
La funzione ha un punto di massimo relativo per $x = 0$: $M(0, -1)$.

3) $y = \sin^2 x + 1$

Calcoliamo la derivata prima:

$y' = 2 \sin x \cos x$

Studiamo il segno della derivata sul cerchio goniometrico:

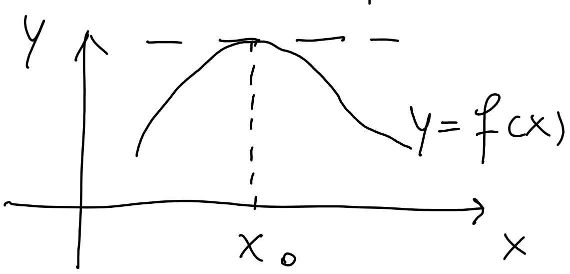


La funzione ha punti di massimo per $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ e punti di minimo per $x = k\pi$: $M\left(\frac{\pi}{2}+k\pi, 2\right)$, $m(k\pi, 1)$.

2° metodo : derivate successive

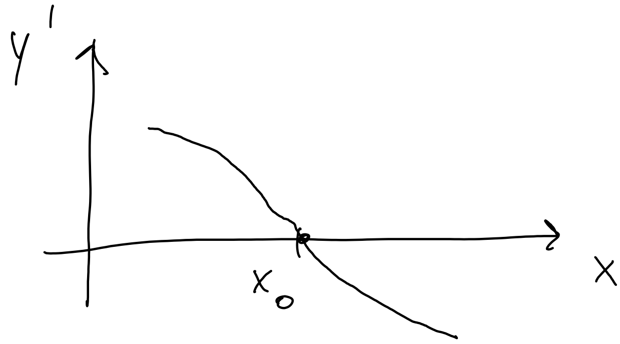
Si possono determinare i massimi e i minimi di una funzione anche calcolando le derivate successive (se esistono).

Se una funzione, per esempio, ha un punto di massimo relativo per $x = x_0$, la sua derivata prima in x_0 è nulla:



$$f'(x_0) = 0$$

La derivata prima è positiva a sinistra di x_0 e negativa a destra.



la derivata prima nell'intorno di un punto di massimo relativo è una funzione decrescente.

La derivata seconda in x_0 deve quindi essere negativa: $f''(x_0) < 0$.

In modo analogo in un punto di minimo relativo si deve avere:

$$f'(x_0) = 0 \quad e \quad f''(x_0) > 0 .$$

Esempi

Determina i punti di massimo e minimo relativo delle seguenti funzioni:

1) $y = x^3 - 12x$

Si pone la derivata prima uguale a zero: $y' = 3x^2 - 12 = 0$

Gli zeri della derivata prima si ottengono risolvendo l'equazione:

$$3x^2 - 12 = 0 \quad , \quad x = \pm 2$$

La derivata seconda è: $y'' = 6x$

$$y''(-2) = -12 < 0 \quad , \quad y''(2) = 12 > 0$$

Si ha un punto di massimo relativo in $x = -2$ e un punto di minimo relativo in $x = 2$: $M(-2, 16)$, $m(2, -16)$.

2) $$y = \frac{e^x}{\sqrt{x}}$$

La derivata prima è:

$$y' = \frac{e^x \sqrt{x} - e^x \frac{1}{2\sqrt{x}}}{x} = \frac{2x e^x - e^x}{2x\sqrt{x}} =$$

$$= \frac{e^x (2x - 1)}{2x\sqrt{x}}$$

La derivata prima si annulla per

$$2x - 1 = 0 \quad , \quad x = \frac{1}{2} .$$

La derivata seconda è:

$$y'' = \frac{\left(e^x(2x-1) + e^x \cdot 2\right) 2x\sqrt{x} - e^x(2x-1)\left(2\sqrt{x} + 2x \frac{1}{2\sqrt{x}}\right)}{4x^3}$$

Nel punto $x = \frac{1}{2}$ la derivata seconda vale:

$$y''\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{2\sqrt{e}\,\sqrt{\frac{1}{2}}}{4 \cdot \frac{1}{8}} = \frac{\sqrt{2e}}{1/2} = 2\sqrt{2e} > 0$$

La funzione ha quindi un punto di minimo relativo in $x = \frac{1}{2}$: $m\left(\frac{1}{2}, \sqrt{2e}\right)$