

Lo studente deve svolgere uno tra i due problemi proposti e 5 quesiti a scelta tra i 10 proposti

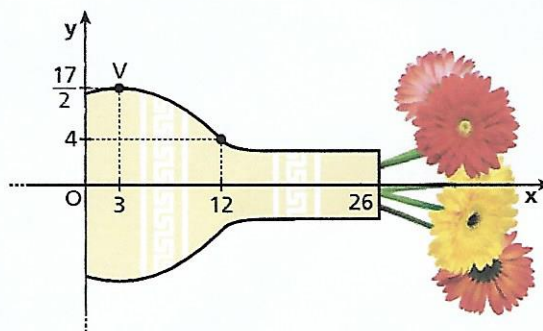
Tempo: circa 6 ore fino alle ore 14.00

Problemi

1 Il vaso in figura è rappresentata una sezione di un vaso da fiori, dove i dati sono in cm.

Il suo profilo $f(x)$ è costituito da:

- un arco di parabola per $0 \leq x \leq 12$ di vertice V ;
- un arco della curva di equazione $y = e^{12-x} + k$ per $12 < x \leq 26$.



- a. Determina l'equazione di $f(x)$.
- b. Verifica che si tratta di una funzione continua e derivabile in tutto il suo dominio.
- c. Calcola l'area della sezione del vaso rappresentata in figura, esprimendola in dm^2 .
- d. Supponi ora che il vaso abbia un profilo diverso, di equazione $g(x) = \frac{ax+b}{x+1}$. Determina a e b in modo che la base di appoggio del vaso rimanga la stessa e che $g(x)$ abbia lo stesso asintoto del profilo $f(x)$. Calcola quanto dovrebbe essere alto il vaso affinché l'area della sezione rimanga invariata.
- e. Vuoi raddrizzare il vaso, scambiando x con y ; indica per quale dei due profili $f(x)$ e $g(x)$ è possibile scrivere l'espressione di x in funzione di y e scrivi tale espressione.

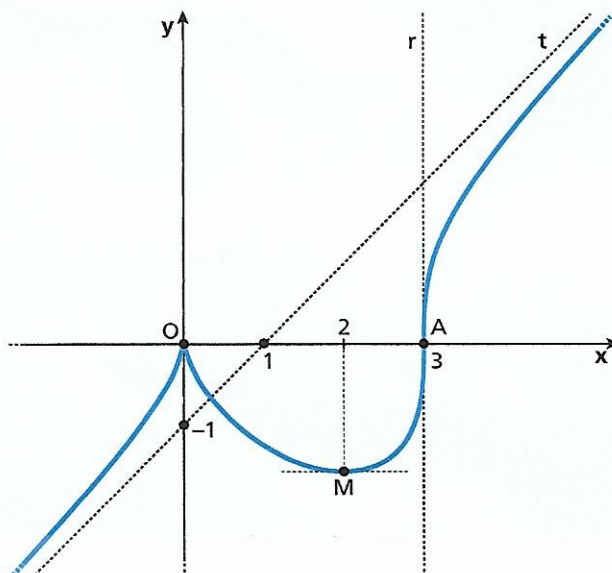
2 La funzione $f(x)$, in figura, è tangente all'asse y in O , alla retta r in $A(3; 0)$ e ammette la retta t come asintoto obliquo. Basandoti sui dati deducibili dal grafico:

- a. determina il dominio, il segno e gli eventuali zeri della funzione $f'(x)$;
- b. calcola il valore dei limiti:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x), \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x), \quad \lim_{x \rightarrow 3^-} f'(x),$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} f'(x), \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f'(x);$$

- c. determina gli eventuali asintoti della funzione $f'(x)$ e studia la crescenza di $f'(x)$.
- d. Spiega perché $f'(x)$ ha almeno un punto x_F di flesso e indica in quale intervallo si trova x_F . Utilizzando le informazioni fornite, traccia un grafico indicativo di $f'(x)$.
- e. Se il grafico di $f(x)$ ha equazione del tipo $y = \sqrt[3]{ax^3 + bx^2 + cx}$, trova i valori di a , b , c utilizzando i dati della figura.



Quesiti

1 Determina il valore del parametro reale a e la funzione $f(x)$, sapendo che:

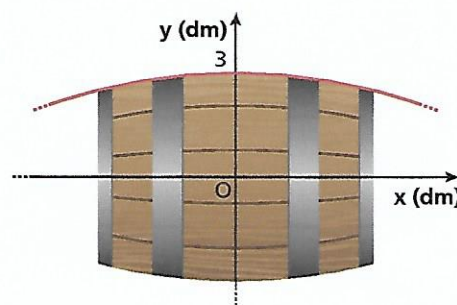
- a. $f''(x) = a + \ln x$;
- b. $f'(1) = -1$, $f(1) = -\frac{1}{4}$, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$.

Trova l'equazione della retta tangente al grafico di $f(x)$ nel suo punto di flesso.

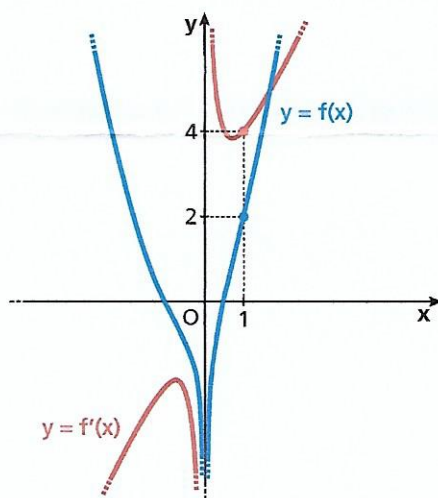
- 2 Determina il valore del parametro k in modo che la parabola di equazione $y = kx^2 - (6k + 1)x + (5k + 1)$ risulti tangente al grafico della funzione $f(x) = \ln x$ nel suo punto di intersezione con l'asse x e calcola l'area della regione delimitata da tale parabola e dal grafico di $f(x)$ nell'intervallo $[1; 4]$.

- 3 **Botte piccola, vino buono** Una botte *barrique* alta 80 cm ha il diametro di base di 50 cm e il diametro massimo di 60 cm. Può essere ottenuta ruotando un arco di parabola attorno all'asse x , come mostrato nella figura.

- Determina l'equazione della parabola.
- Quanti litri di vino può contenere la botte?



- 4 **LEGGI IL GRAFICO** Determina l'equazione della funzione $f(x)$, sapendo che $f'(x)$ ha il grafico mostrato in figura e che $f''(x) = \frac{2x^2 - 1}{x^2}$.



- 5 Ricava l'equazione del luogo γ descritto dal punto di massimo relativo della curva λ di equazione $y = x^2 e^{ax}$ al variare di $a \in \mathbb{R}$. Verifica che la curva λ presenta un minimo relativo e assoluto per $x = 0$, qualunque sia il valore di $a \in \mathbb{R}$.

- 6 **REALTÀ E MODELLI** **Scena del crimine** La polizia scientifica sta effettuando i rilievi su una vittima di omicidio. Il cadavere si trova in un luogo in cui la temperatura ambiente è di 25°C . Si presuppone che la temperatura del cadavere $T(t)$ vari nel tempo secondo la legge empirica $T'(t) = -\frac{6}{5}[T(t) - 25]$, dove t è il tempo in ore misurato a partire dall'ora del decesso.

- Verifica che le soluzioni dell'equazione differenziale sono del tipo $T(t) = 25 + Ce^{-\frac{6}{5}t}$.
- Determina il valore di C supponendo che all'ora del decesso il corpo avesse una temperatura di $36,5^\circ\text{C}$.
- Se il cadavere è stato rinvenuto alle 2:00, quando la sua temperatura era di 30°C , qual è l'ora presunta del decesso?



- 7 **Il Ponte dei Salti** Il profilo superiore del Ponte dei Salti che si trova a Lavertezzo, in Svizzera, è approssimabile con il grafico di una funzione che ha le seguenti caratteristiche:

- è simmetrica rispetto all'asse y ;
- ha un minimo nell'origine e due massimi nei punti $(\pm 7; 2)$.

Tali caratteristiche sono tipiche di una funzione del tipo

$$f(x) = h(x) e^{-k \cdot h(x)},$$

dove $h(x) = ax^2 + bx + c$. Determina una possibile espressione analitica di $f(x)$ che rispetti le due condizioni.



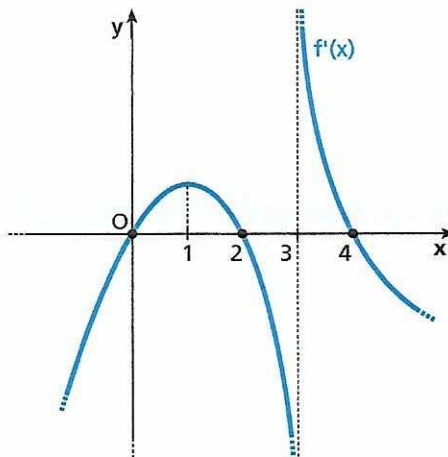
- 8 Tra le sfere di centro $C(1; 2; -1)$ determina quella tangente alla retta r di equazione

$$\frac{x+2}{2} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-2}{-1}$$

e trova le coordinate del punto di tangenza.

Verifica che la sfera trovata è tangente anche al piano α di equazione $x - 2y - 2z = 8$.

- 9 Nella figura è rappresentato il grafico della derivata $f'(x)$ di una funzione $f(x)$, continua in tutto \mathbb{R} , che passa per il punto $(3; 1)$.



Descrivi le principali caratteristiche di $f(x)$, indicando i punti di massimo e di minimo, e traccia il suo grafico. Disegna inoltre il grafico di $f''(x)$.

- 10 Una fabbrica produce lettori MP3. In base alle statistiche di produzione, i lettori funzionano correttamente nel 95% dei casi. Durante un controllo a campione, se ne selezionano casualmente 10. Calcola la probabilità dei seguenti eventi.
- A: «Solo i primi 8 lettori testati funzionano correttamente».
 - B: «Vi sono al massimo 9 lettori funzionanti».
 - C: «Almeno 8 lettori funzionano correttamente».