Simulazione del 6 marzo (solo quesiti)

Soluzioni

1) Il grafico passa per l'origine quindi $f(0)=0$

cioè $b=0$.

La pendenza in $x=0$ deve valere $16/3$ quindi:

$$D\left.\frac{ax+b}{cx+3}\right|_{x=0} = \frac{16}{3}\ ,\quad \text{cioè}$$

$$D\left.\frac{ax}{cx+3}\right|_{x=0} = \left.\frac{a(cx+3)-ax\cdot 3}{(cx+3)^2}\right|_{x=0} = \frac{3a}{9} = \frac{a}{3} = \frac{16}{3}$$

da cui $a=16$.

Le due funzioni che compongono la $f(x)$

devono valere $\frac{64}{5}$ per $x=12$, quindi:

$$\frac{64}{5} = \frac{1}{5}\cdot 2^{d-12}\ ,\quad \text{da cui } 2^{d-12} = 64\ ,$$

$$2^{d-12} = 2^6\ ,\quad d-12=6 \quad \text{e} \quad d=18$$

infine $\frac{16\cdot 12}{c\cdot 12+3} = \frac{64}{5}$ da cui

$$12c+3 = 16\cdot 12\cdot\frac{5}{64}\ ,\quad 12c = 15-3$$

da cui si ricava $c=1$

La funzione $f(x) = \begin{cases} \dfrac{16x}{x+3} & \text{per } 0 \leq x \leq 12 \\ \dfrac{1}{5} \cdot 2^{18-x} & \text{per } x > 12 \end{cases}$

non è derivabile in $x = 12$, infatti

$$f'_-(12) = \left.\frac{16(x+3) - 16x}{(x+3)^2}\right|_{x=12} = \frac{16}{75}$$ è diversa da

$$f'_+(12) = \left.-\frac{1}{5} \cdot 2^{18-x} \cdot \ln 2\right|_{x=12} = -\frac{64}{5} \cdot \ln 2$$

(la derivata destra e la derivata sinistra sono diverse).

2) Il volume del cilindro è $V = 1\,dm^3$:

$V = \pi r^2 \cdot h = 1$, $h = \dfrac{1}{\pi r^2}$

La superficie, in funzione del raggio:

$$S(r) = 2\pi r^2 + 2\pi r h = 2\pi r^2 + 2\pi r \cdot \frac{1}{\pi r^2} =$$

$$= 2\pi r^2 + \frac{2}{r}$$

La superficie è massima se $S'(r) = 0$, quindi:

$S'(r) = 4\pi r - \dfrac{2}{r^2} = 0$ da cui si ottiene

$$r = \sqrt[3]{\frac{1}{2\pi}} = 0{,}542\ dm \cong 5{,}42\ cm$$

$$h = \frac{1\ dm^3}{\pi \cdot 0{,}542^2} = 1{,}084\ dm \cong 10{,}8\ cm$$

3) Dal grafico si ricava che

$$f(x) = 2x+2 \qquad e \qquad g(x) = -x^2+1$$

a) $f(g(x)) = 2(-x^2+1)+2 = -2x^2+4$

$D\, f(g(x)) = -4x$

b) $\ln \dfrac{g(x)}{f(x)} = \ln \dfrac{-x^2+1}{2x+2} = \ln \dfrac{1-x}{2}$

$D \ln \dfrac{g(x)}{f(x)} = \dfrac{1}{\frac{1-x}{2}} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -\dfrac{1}{x-1}$

c) $[g(x)]^2 = (1-x^2)^2$

$D\,[g(x)]^2 = 2(1-x^2)\cdot(-2x) = -4x(1-x^2)$

4) Nel punto di tangenza x_0 si ha:

$$f(x_0) = g(x_0) \qquad e \qquad f'(x_0) = g'(x_0)$$

Per $x_0 = 1$ si ha quindi:

$$\begin{cases} a = 1+b \\ 2a = 1-2(1+b) \end{cases}$$

da cui si ricavano i valori:

$a = \frac{1}{4}$ e $b = -\frac{3}{4}$

Quindi $f(x) = \frac{1}{4} e^{2(x-1)}$ e $g(x) = \frac{x - \frac{3}{4}}{x^2}$,

$f(1) = g(1) = \frac{1}{4}$ e $f'(1) = g'(1) = \frac{1}{2}$.

L'equazione della tangente nel punto $P(1, \frac{1}{4})$

è: $\left(y - \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2}(x-1)$ oppure $y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}$.

5) La funzione $y = \frac{2x^2 - x}{4 - x}$ ha l'asintoto

verticale $x = 4$ $\left(\text{infatti } \lim_{x \to 4} \frac{2x^2 - x}{4 - x} = \infty\right)$

e l'asintoto obliquo $y = -2x - 7$

$\Big($infatti $\lim_{x \to \infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{2x^2 - x}{4x - x^2} = -2 = m$

e $\lim_{x \to \infty} (y - mx) = \lim_{x \to \infty} \left(\frac{2x^2 - x}{4 - x} + 2x\right) =$

$= \lim_{x \to \infty} \frac{7x}{4 - x} = -7 = q \Big)$

Perché la funzione $y = \frac{ax^3 + bx^2 + 2}{x^2 + cx}$ abbia

lo stesso asintoto verticale della prima

funzione è necessario che $4^2 + c \cdot 4 = 0$

cioè $c = -4$.

Perché la seconda funzione abbia lo stesso asintoto obliquo della prima occorre che

$$\lim_{x\to\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{ax^3+bx^2+2}{x^3+cx^2} = a = -2$$

e

$$\lim_{x\to\infty} \left(\frac{-2x^3+bx^2+2}{x^2-4x} + 2x \right) = -7$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\cancel{-2x^3} + bx^2 + 2 + \cancel{2x^3} - 8x^2}{x^2-4x} = -7$$

da cui $b - 8 = -7$ e $b = 1$

In conclusione i parametri devono assumere i valori $a = -2$, $b = 1$, $c = -4$.

6) Al tempo $t = 1$ h :

$$S(1) = 240 \text{ dm}^2 = 4\pi r^2(1) \qquad \text{dove } r(1)$$

è il raggio iniziale (al tempo $t=1$) della sfera.

Quindi $r(1) = \sqrt{\frac{S(1)}{4\pi}} = \sqrt{\frac{240}{4\pi}}$ dm $= 4{,}37$ dm

Dai dati del problema poi:

$$V'(r) = D\left(\frac{4}{3}\pi r^3\right) = \cancel{3} \cdot \frac{4}{\cancel{3}} \pi r^2 \cdot r'$$

da cui $r'(1) = \dfrac{V'(1)}{4\pi\, r(1)^2} = \dfrac{V'(1)}{\cancel{4\pi}\,\frac{S(1)}{\cancel{4\pi}}} =$

$$= \frac{480}{240} \frac{cm^3/h}{dm^2} = \frac{480}{24000} \frac{cm^3/h}{cm^2} = 0{,}02 \frac{cm}{h}$$

6) $S'(1) = D(4\pi r^2)\Big|_{r=1} = 8\pi\, r(1) \cdot r'(1) =$

$$\cong 8\pi \cdot 43{,}7 \cdot 0{,}02 \frac{cm^2}{h} \cong 22 \frac{cm^2}{h}$$

7) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(\cos x - 1)}{\ln(\cos^2 x)} =$ usando de L'Hopital

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\cos(\cos x - 1)\cdot(-\sin x)}{\frac{1}{\cos^2 x} \cdot 2\cos x \cdot (-\sin x)} = \frac{1}{2}$$

8) La probabilità che un passeggero non abbia il biglietto è del 4%.

La probabilità che almeno uno non abbia il biglietto è pari ad 1 (la certezza) meno la probabilità che tutti i passeggeri abbiano il biglietto:

$P = 1 - (0{,}96)^{40} = 0{,}805$

Se i passeggeri fossero 80 non raddoppia, infatti: $P = 1 - (0{,}96)^{80} = 0{,}962$.

9) $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{3}{n}\right)^{-n} = \lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{3}{n}\right)^{n}\right]^{-1} =$

$= \left(e^{3}\right)^{-1} = e^{-3}$

10) La distanza dall'origine è

$$d(x) = \sqrt{x^2+\frac{4}{x^4}}$$

La distanza è minima se $d'(x)=0$

$$d'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x^2+\frac{4}{x^4}}}\cdot\left(2x-\frac{16}{x^5}\right)=0$$

da cui: $x-\frac{8}{x^5}=0$, $x^6=8$

$$x=\sqrt[6]{8} = 2^{3/6} = 2^{1/2} = \sqrt{2} \cong 1{,}4$$

La funzione $f(x)=\frac{2}{x^2}$ è pari

quindi si hanno due punti simmetrici

per $x=\pm\sqrt{2}$