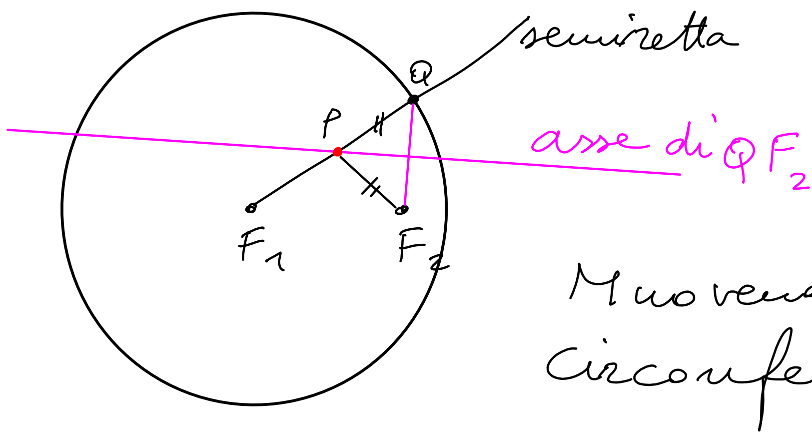
L'equazione dell'ellisse

L'ellisse è il luogo di punti per i quali è costante la somma delle distanze da due punti fissi.

I punti fissi sono detti fuochi dell'ellisse.

Dai valori della costante e della distanza tra i fuochi dipende la forma dell'ellisse.

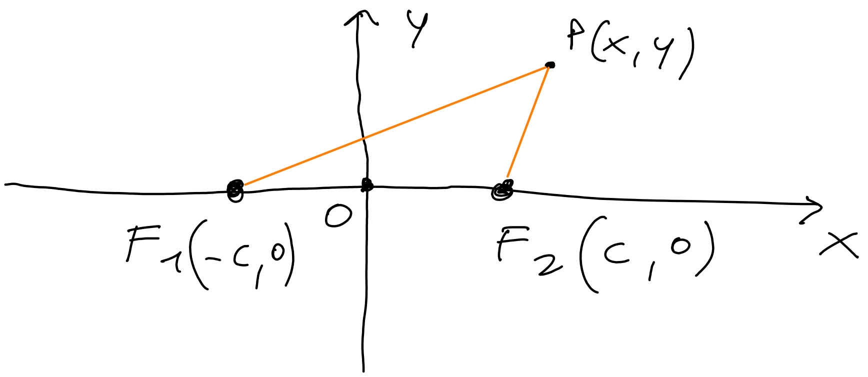
Una costruzione dell'ellisse può essere schematizzata come segue:



Muovendo Q sulla circonferenza il punto P descrive un'ellisse con $PF_1 + PF_2 = F_1Q$ (la costante è uguale al raggio del cerchio di centro F_1).

Prova con GeoGebra.

Per ricavare l'equazione si introduce un sistema cartesiano con l'asse x passante per i fuochi e l'asse y passante per il punto medio del segmento $F_1 F_2$.



La definizione dell'ellisse si trasforma, usando il linguaggio algebrico, nell'equazione:

$$\overline{PF_1} + \overline{PF_2} = \text{costante}$$

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2} + \sqrt{(x-c)^2+y^2} = 2a \quad (\text{valore costante})$$

riscrivendo nella forma

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2+y^2}$$, poi elevando al quadrato e semplificando:

$$\cancel{x^2} + \cancel{c^2} + 2xc + \cancel{y^2} = 4a^2 + \cancel{x^2} + \cancel{c^2} - 2xc + \cancel{y^2} +$$
$$- 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2} \; ,$$

$$4xc - 4a^2 = -4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

$$a^2 - xc = a\sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

Elevando ancora al quadrato:

$$(a^2-xc)^2 = a^2\left((x-c)^2+y^2\right)$$

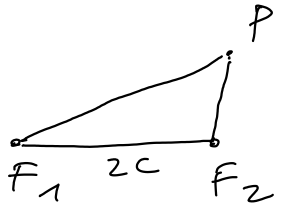
$$a^4 + x^2c^2 - 2a^2xc = a^2(x^2+c^2-2xc+y^2)$$

$$a^4 + x^2c^2 \cancel{-2a^2xc} = a^2x^2 + a^2c^2 \cancel{-2a^2xc} + a^2y^2$$

$$x^2(a^2-c^2) + a^2y^2 = a^2(a^2-c^2)$$

$2c$ è la distanza tra i fuochi, che è minore di $2a$, infatti

$\overline{PF_1} + \overline{PF_2} = 2a$ e $\overline{F_1F_2} < \overline{PF_1} + \overline{PF_2}$



quindi $a > c$, $a^2 - c^2 > 0$

e si può porre $a^2 - c^2 = b^2$.

Si ottiene allora l'equazione:

$$x^2b^2 + y^2a^2 = a^2b^2$$

Dividendo per a^2b^2 si ottiene infine l'equazione dell'ellisse in forma canonica:

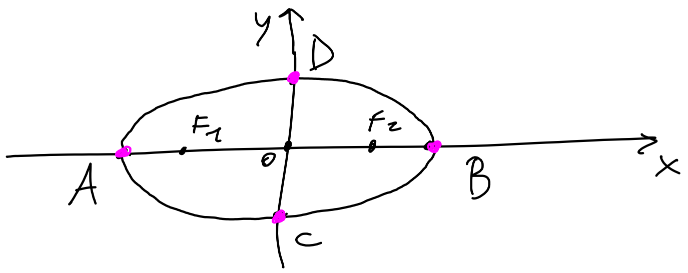
$$\boxed{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1}$$

Le intersezioni dell'ellisse con l'asse x $(y=0)$, sono:

$\frac{x^2}{a^2}=1$, $x=\pm a$, $A(-a,0)$, $B(a,0)$

Le intersezioni dell'ellisse con l'asse y $(x=0)$, sono:

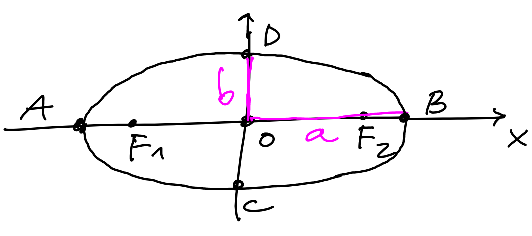
$\frac{y^2}{b^2}=1$, $y=\pm b$, $C(0,-b)$, $D(0,b)$



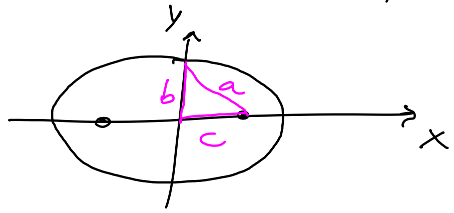
I punti A, B, C, D sono detti vertici dell'ellisse.

AB è l'asse maggiore, di lunghezza 2a
CD è l'asse minore, di lunghezza 2b.

a e b sono dunque le lunghezze dei semiassi dell'ellisse.



Dallo relazione: $b^2 = a^2 - c^2$,
oppure $a^2 = b^2 + c^2$,
si vede che a è anche la lunghezza dell'ipotenusa del triangolo $O\overset{\Delta}{F_2}D$ (ed anche degli altri tre triangoli isometrici $O\overset{\Delta}{F_1}D$, $O\overset{\Delta}{F_2}C$, $O\overset{\Delta}{F_1}C$).



Esercizi

1) Scrivi l'equazione dell'ellisse con il centro nell'origine, il semiasse maggiore lungo 5 e un fuoco in $F(3,0)$.

Soluzione

$a = 5$, $c = 3$, $b^2 = a^2 - c^2 = 25 - 9 = 16$
$\Rightarrow b = 4$

l'equazione è: $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$

cioè $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{16} = 1$

2) Scrivi la forma canonica dell'equazione dell'ellisse con i fuochi sull'asse x e semiassi di lunghezze $a=3$, $b=2$. Determina poi la posizione dei fuochi.

Soluzione

L'equazione è $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$,

$c^2=a^2-b^2=9-4=5$, $c=\sqrt{5}$

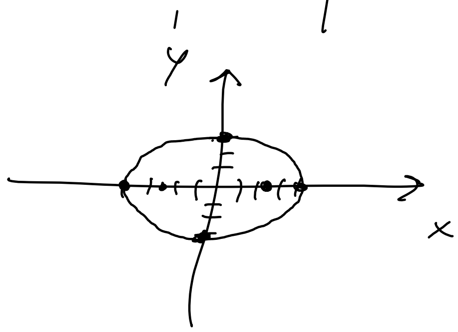
I fuochi si trovano in $F_1(-\sqrt{5},0)$, $F_2(\sqrt{5},0)$.

3) Disegna l'ellisse di equazione $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$.

Determina anche i fuochi e rappresentali graficamente.

Soluzione

Dall'equazione $a = 4$, $b = 3$

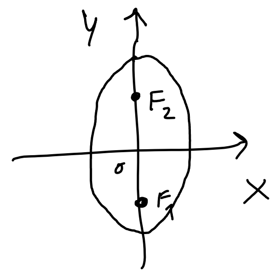


$$c^2 = a^2 - b^2 = 16 - 9 = 7$$

$$c = \sqrt{7} \simeq 2,6$$

$$F_1(-\sqrt{7}, 0), \quad F_2(\sqrt{7}, 0).$$

Equazione dell'ellisse con i fuochi sull'asse y



Si invertono i ruoli degli assi x e y.

Scambiando x e y nell'equazione dell'ellisse con i fuochi su x si ottiene:

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$$

Il semiasse maggiore è sempre a ma si trova sull'asse delle ordinate.

E' ancora valida la relazione

$$c = \sqrt{a^2 - b^2}.$$