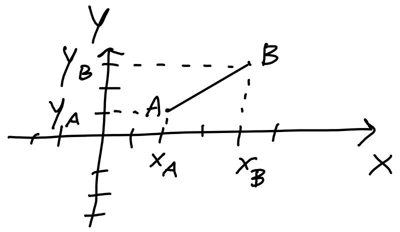
L'equazione della retta



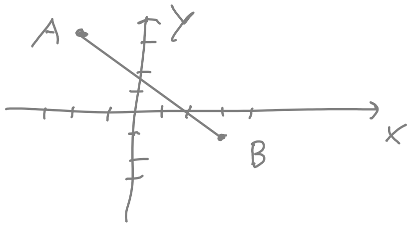
Dato un segmento di estremi A e B si definisce la sua pendenza come il rapporto

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

Esempio

Calcola la pendenza del segmento di estremi $A(-2, 3)$ e $B(3, -1)$

Disegnamo i punti sul piano cartesiano



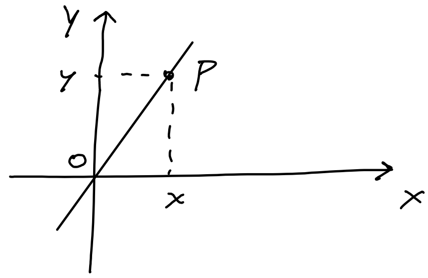
Osservando il disegno si vede che la pendenza deve essere negativa (il segmento è decrescente ↘), infatti

$$m = \frac{-1-3}{3-(-2)} = \frac{-4}{5} = -\frac{4}{5}$$

Tutti i segmenti di una stessa retta hanno la stessa pendenza.

Considerando una retta passante per l'origine deve valere la relazione

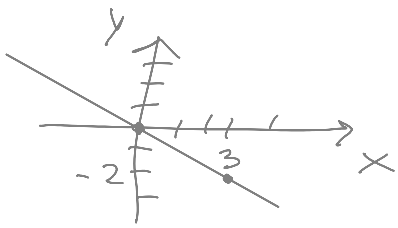
$m = \frac{y}{x}$, per ogni punto P della retta



La relazione $m = \frac{y}{x}$, oppure $y = mx$ è l'equazione di una retta passante per l'origine.

Esempio

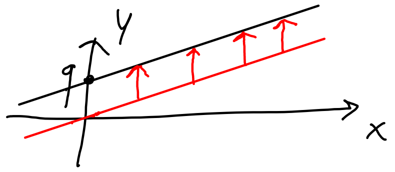
Determina l'equazione della retta passante per l'origine e per il punto $P(3, -2)$



La pendenza della retta vale $m = -\frac{2}{3}$.

L'equazione della retta è $y = -\frac{2}{3}x$.

Se la retta non passa per l'origine, ma attraversa l'asse y in un punto $Q(0,q)$



l'ordinata di tutti i punti della retta aumenta di q e l'equazione della retta diventa

$y = mx + q$.

Tutte le rette con la stessa pendenza (o coefficiente angolare) m, sono parallele.

Le rette perpendicolari hanno invece pendenze antireciproche: $m_1 = -\frac{1}{m_2}$.

Esercizi

1) Determina l'equazione della retta passante per i punti $A(-1,2)$ e $B(3,-4)$

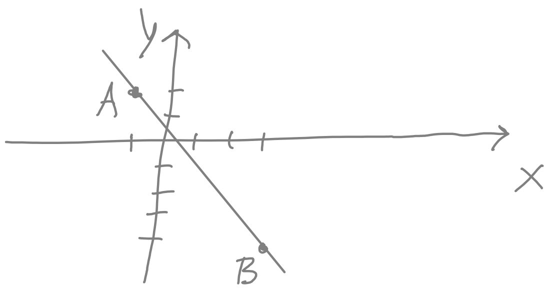
La pendenza della retta è

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{-4-2}{3-(-1)} = \frac{-6}{4} = -\frac{3}{2}$$

Per determinare q si sostituiscono le coordinate di un punto nell'equazione $y = -\frac{3}{2}x + q$ (per esempio quelle di A):

$2 = -\frac{3}{2}(-1) + q$, da questa equazione si può ottenere $q = 2 - \frac{3}{2} = \frac{1}{2}$.

L'equazione della retta è dunque



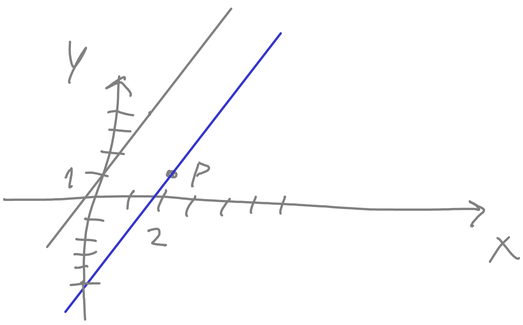
$$y = -\frac{3}{2}x + \frac{1}{2}$$

In modo alternativo si può ottenere l'equazione della retta anche sostituendo le coordinate dei punti A e B nell'equazione generale $y = mx + q$ e risolvendo il sistema ottenuto nelle due incognite m, q:

$$\begin{cases} 2 = m \cdot (-1) + q \\ -4 = m \cdot 3 + q \end{cases} \quad \begin{cases} m = q - 2 \\ -4 = 3(q-2) + q \end{cases}$$

$$\begin{cases} m = q - 2 \\ -4 = 3q - 6 + q \end{cases} \quad \begin{cases} m = q - 2 \\ 4q = 2 \end{cases} \quad \begin{cases} m = \frac{1}{2} - 2 = -\frac{3}{2} \\ q = \frac{1}{2} \end{cases}$$

2) Determina l'equazione della retta parallela alla retta di equazione $y = 3x + 1$ e passante per il punto $P(2, 1)$.



La pendenza deve essere la stessa quindi

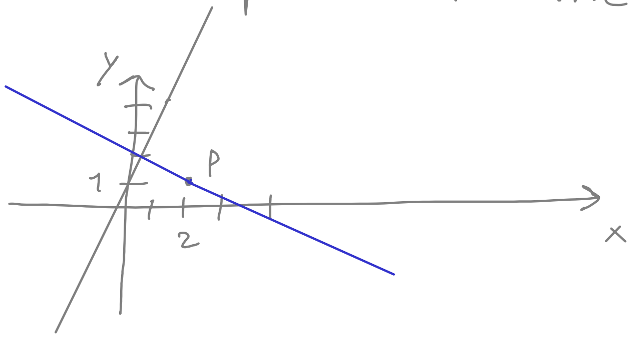
$y = 3x + q$. Per determinare q si sostituiscono nell'equazione le coordinate di P (P appartiene alla retta):

$$1 = 3 \cdot 2 + q \quad , \quad q = -5$$

L'equazione è $y = 3x - 5$

3) Determina l'equazione della retta perpendicolare alla retta di equazione $y = 3x + 1$ e passante per il punto $P(2, 1)$.

Si procede in modo simile a prima, ma questa volta la pendenza è antireciproca: $m = -\frac{1}{3}$



$$y = -\frac{1}{3}x + q$$

$$1 = -\frac{1}{3} \cdot 2 + q$$

$q = 1 + \frac{2}{3} = \frac{5}{3}$, l'equazione della perpendicolare è quindi $y = -\frac{1}{3}x + \frac{5}{3}$.

Fasci di rette

Tutte le rette passanti per un punto C costituiscono un fascio di rette proprio di centro C.

Tutte le rette parallele ad una retta data r costituiscono un fascio di rette improprio di generatrice r.

Esercizi

1) Determina l'equazione del fascio di rette di centro $C(2,5)$.

Se le rette passano per il punto $C(2,5)$, le coordinate di questo punto devono verificare l'equazione generale $y = mx + q$, quindi

$$5 = 2m + q .$$

Da questa uguaglianza si può ricavare $q = 5 - 2m$. Sostituendo nell'equazione generale: $y = mx + 5 - 2m$

o anche $y - 5 = m(x-2)$

2) Determina l'equazione del fascio proprio di rette di centro $C(x_c, y_c)$.

Come nel caso precedente deve essere

$y_c = m x_c + q$ da cui $q = y_c - m x_c$

Sostituendo: $y = mx + y_c - m x_c$ e, riordinando i termini,

$$\boxed{y - y_c = m(x - x_c)}$$

che è l'equazione generale di un fascio di rette di centro $C(x_c, y_c)$.

3) Trova l'equazione del fascio di rette improprio di generatrice $y = 4x + 2$.

Tutte le rette parallele alla generatrice hanno equazione $\boxed{y = 4x + q}$ che è quindi l'equazione del fascio improprio cercato.

I fasci propri di rette dipendono dal parametro m.
I fasci impropri di rette dipendono dal parametro q.

Esercizio

Trova la retta passante per $C(1,2)$ e per $P(3,5)$.

Il fascio di centro C è $y - 2 = m(x-1)$.
La retta per P: $5 - 2 = m(3-1)$, $3 = 2m$,
$m = \frac{3}{2}$, $\quad y - 2 = \frac{3}{2}(x-1)$

Forma esplicita ed implicita

L'equazione della retta può essere scritta in forma esplicita ($y = mx + q$) o in forma implicita ($ax + by + c = 0$).

La forma implicita contiene un coefficiente (o parametro) in più, ma ha il vantaggio di permettere la rappresentazione di tutte le rette del piano.

Nella forma implicita invece non si possono rappresentare le rette parallele all'asse y, infatti per queste rette non è definita la pendenza m.

Le rette parallele all'asse y hanno equazione del tipo $x = a$.

Esercizi

1) Converti in forma esplicita

l'equazione della retta $2x + 3y + 1 = 0$ e determina pendenza e ordinata all'origine della retta.

Si ricava la y:

$3y = -2x - 1$, $\quad y = -\frac{2}{3}x - \frac{1}{3}$

Quindi $m = -\frac{2}{3}$ e $q = -\frac{1}{3}$.

2) Scrivi in forma implicita l'equazione $y = 2x - 3$.

Si porta tutto da una parte del segno di uguaglianza: $y - 2x + 3 = 0$.

La rappresentazione in forma implicita non è unica, per esempio l'equazione $2y - 4x + 6 = 0$, ottenuta moltiplicando per 2 l'equazione precedente, rappresenta la stessa retta.