Esercizi

1) Dati i punti $P(1,-2)$ e $Q(4,2)$, verifica che la distanza di Q dall'origine degli assi è doppia di quella di P.

$$\overline{PO} = \sqrt{(1-0)^2+(-2-0)^2} = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$$

$$\overline{QO} = \sqrt{(4-0)^2+(2-0)^2} = \sqrt{16+4} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

2) Calcola le coordinate di un punto P, appartenente all'asse delle ascisse, equidistante da $Q(1,-3)$ e da $T(-4,2)$.

Deve essere $\overline{PQ} = \overline{PT}$. Le coordinate di P sono $P(x,0)$ perché il punto P si trova sull'asse delle ascisse, quindi

$$\sqrt{(x-1)^2+(0-(-3))^2} = \sqrt{(x-(-4))^2+(0-2)^2}$$

$$(x-1)^2+9 = (x+4)^2+4$$

$$\cancel{x^2}-2x+1+9 = \cancel{x^2}+8x+16+4$$

$10x = -10$, $\quad x=-1$, il punto P ha coordinate $P(-1,0)$.

3) Al segmento AB corrisponde, in una traslazione di vettore $\vec{v}(-5,2)$, il segmento $A'B'$.

Se $A'(-5,3)$ e $B'(4,5)$, quali sono le coordinate di A e di B?

Per il punto A: $\begin{cases} -5 = x-5 \\ 3 = y+2 \end{cases}$, $\begin{cases} x=0 \\ y=1 \end{cases}$, $A(0,1)$

Per il punto B: $\begin{cases} 4 = x-5 \\ 5 = y+2 \end{cases}$, $\begin{cases} x=9 \\ y=3 \end{cases}$, $B(9,3)$

4) Scrivi l'equazione della retta trasformata della retta di equazione $y=-x-4$ nella traslazione di vettore $\vec{v}(3,5)$.

Le equazioni della traslazione sono $\begin{cases} x'=x+3 \\ y'=y+5 \end{cases}$.

Da queste si ricavano le equazioni inverse

$\begin{cases} x=x'-3 \\ y=y'-5 \end{cases}$. Sostituendo nell'equazione della retta si ha

$$y=-x-4 \longrightarrow y'-5=-(x'-3)-4$$

Togliendo gli apici e riordinando i termini si ottiene: $y=-x+4$.

5) Scrivi l'equazione della curva simmetrica di quella di equazione $3x+4y-2=0$ rispetto all'asse y.

Si può procedere come nel caso precedente. Questa volta le equazioni della simmetria sono: $\begin{cases} x' = -x \\ y' = y \end{cases}$.

Ricavando x e y si ha $\begin{cases} x = -x' \\ y = y' \end{cases}$.

Si tratta quindi di sostituire x con $-x$:

$$3x + 4y - 2 = 0 \longrightarrow -3x + 4y - 2 = 0$$

Che è l'equazione cercata.

6) Verifica se i punti della seguente terna sono allineati:

$A(2,1)$, $B(-6,-3)$, $C\left(5, \frac{5}{2}\right)$

Calcolo la pendenza dei segmenti AB e BC:

$$m_{AB} = \frac{-3-1}{-6-2} = \frac{-4}{-8} = \frac{1}{2}, \quad m_{BC} = \frac{\frac{5}{2} - (-3)}{5-(-6)} = \frac{\frac{11}{2}}{11} = \frac{1}{2}$$

La pendenza è la stessa, quindi i punti sono allineati.

7) Scrivi l'equazione della retta con ordinata all'origine 4 e perpendicolare alla retta di equazione $x + 3y - 1 = 0$.

La pendenza della retta di equazione

$x+3y-1=0$ si ricava dalla forma esplicita dell'equazione: $y=-\frac{1}{3}x+\frac{1}{3}$

Quindi $m=-\frac{1}{3}$ e l'equazione della retta è $y=3x+4$, infatti la pendenza della perpendicolare è antireciproca $(m=3)$.

8) Determina il punto di intersezione delle rette di equazione $2x+4y-3=0$ e $x-8y-4=0$.

Si risolve il sistema formato dalle equazioni delle due rette:

$$\begin{cases} 2x+4y-3=0 \\ x-8y-4=0 \end{cases} \quad \begin{cases} \text{''} \\ x=8y+4=0 \end{cases} \quad \begin{cases} 2(8y+4)+4y-3=0 \\ x=8y+4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 16y+8+4y-3=0 \\ x=8y+4 \end{cases} \quad \begin{cases} 20y=-5 \\ x=8y+4 \end{cases} \quad \begin{cases} y=-\frac{1}{4} \\ x=2 \end{cases}$$

Il punto di intersezione è $P\left(2,-\frac{1}{4}\right)$.

9) Calcola la distanza del punto $P\left(5,\frac{3}{2}\right)$ dalla retta di equazione $3x+4y+4=0$.

Usando la nota formula:

$$d=\frac{\left|3\cdot 5+4\cdot\frac{3}{2}+4\right|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{|15+6+4|}{\sqrt{9+16}}=5$$

10) Studia le caratteristiche del fascio di rette di equazione

$$(2+3k)x+(1-2k)y+4+6k=0$$

Si raccoglie k per trovare le generatrici:

$$2x+3kx+y-2ky+4+6k=0$$

$$2x+y+4+k(3x-2y+6)=0$$

Le generatrici sono le rette di equazione:

$2x+y+4=0$ e $3x-2y+6=0$

Non sono rette parallele perchè le pendenze delle due rette sono diverse:

$m_1=-2$, $m_2=\frac{3}{2}$.

Si tratta quindi di un fascio proprio.

Il centro del fascio di rette si trova risolvendo il sistema:

$$\begin{cases} 2x+y+4=0 \\ 3x-2y+6=0 \end{cases} \quad \begin{cases} y=-2x-4 \\ 3x-2(-2x-4)+6=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y=-2x-4 \\ 3x+4x+8+6=0 \end{cases} \quad \begin{cases} y=-2x-4 \\ 7x+14=0 \end{cases} \quad \begin{cases} y=0 \\ x=-2 \end{cases}$$

Le coordinate del centro del fascio sono

$C(-2,0)$.