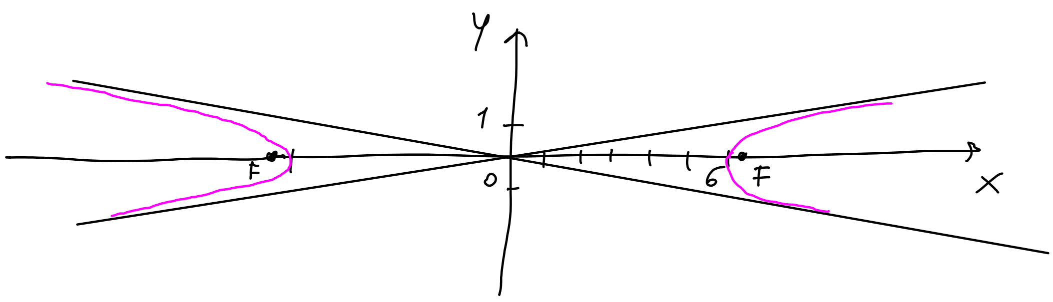
Esercizi sull'iperbole

1) Studia le caratteristiche e disegna il grafico dell'iperbole di equazione: $\frac{x^2}{36} - y^2 = 1$

$a = 6$, $b = 1$, $c = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{37}$

I fuochi sono sull'asse x.

L'eccentricità vale $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{37}}{6}$



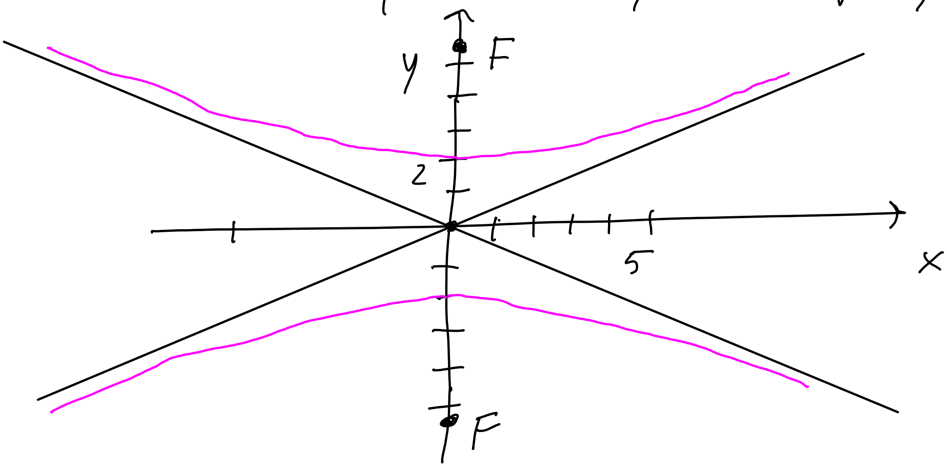
2) Disegna l'iperbole di equazione

$$\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{4} = -1$$

In forma canonica si ha:

$\frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{25} = 1$, i fuochi si trovano sull'asse y.

$a = 2$, $b = 5$, $c = \sqrt{29} \simeq 5{,}4$



3) Scrivi l'equazione dell'iperbole, di centro l'origine, che ha un vertice nel punto $A(0, 2\sqrt{3})$ e un fuoco in $F(0,4)$

I fuochi sono sull'asse y, quindi

$c = 4$ e $a = 2\sqrt{3}$.

$$b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{16 - 12} = \sqrt{4} = 2$$

L'equazione è $\dfrac{y^2}{12} - \dfrac{x^2}{4} = 1$

4) Calcola l'eccentricità dell'iperbole di equazione

$$\frac{1}{2}x^2 - y^2 = 2$$

L'equazione in forma canonica è:

$$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{2} = 1$$

$$a = 2, \quad b = \sqrt{2}, \quad c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{4+2} = \sqrt{6}$$

L'eccentricità è $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{6}}{2} \simeq 1{,}2$

5) Scrivi l'equazione dell'iperbole con centro nell'origine, $b = 3$, $e = \frac{\sqrt{34}}{5}$ e fuochi sull'asse y

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a} = \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}} = \frac{\sqrt{34}}{5}$$

$$\sqrt{1 + \frac{9}{a^2}} = \frac{\sqrt{34}}{5}, \quad 1 + \frac{9}{a^2} = \frac{34}{25}, \quad \frac{9}{a^2} = \frac{9}{25}$$

$$\Rightarrow a^2 = 25, \quad b^2 = 9$$

L'equazione è $\frac{y^2}{25} - \frac{x^2}{9} = 1$

6) Determina le coordinate dei vertici e dei fuochi dell'iperbole equilatera di equazione $x^2 - y^2 = -4$. Disegna la curva.

In forma canonica : $\frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{4} = 1$

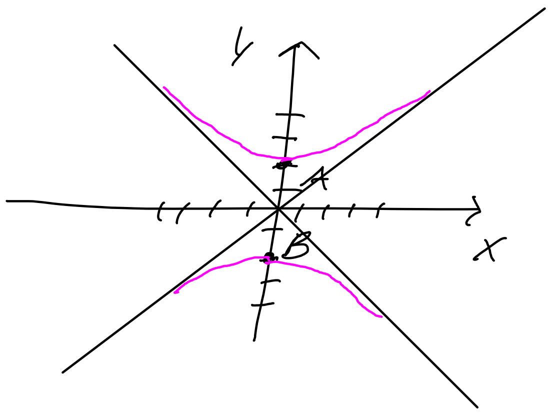
I fuochi si trovano sull'asse y

$a = 2$, $b = 2$, $c = \sqrt{4+4} = \sqrt{8}$

L'eccentricità vale $e = \frac{c}{a} = \sqrt{2}$

I fuochi hanno coordinate $F_1(0, -\sqrt{8})$ $F_2(0, \sqrt{8})$, i vertici sono $A(0, 2)$, $B(0, -2)$.

Gli asintoti hanno equazioni: $y = \pm x$.



Gli asintoti sono perpendicolari.

7) Disegna l'iperbole di equazione

$4xy + 1 = 0$

Si tratta di una iperbole riferita ai propri asintoti (del tipo $xy = k$, oppure $y = \frac{k}{x}$).

$y = -\frac{1}{4x}$, $k = -\frac{1}{4}$.

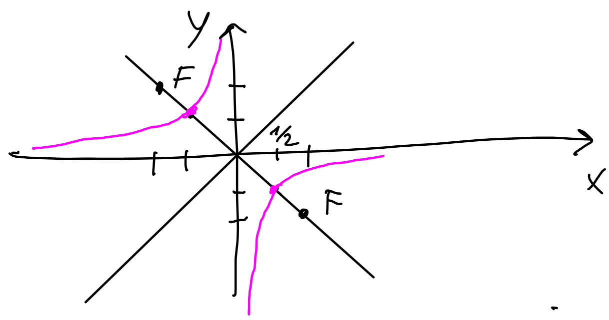
Gli assi cartesiani sono gli asintoti dell'iperbole mentre i fuochi si trovano sulla retta

$y = -x$ (k è negativo come il prodotto $x \cdot y$).

Le coordinate dei vertici sono

$V_1(-\sqrt{|k|}, \sqrt{|k|})$, $V_2(\sqrt{|k|}, -\sqrt{|k|})$, quindi

$V_1\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, $V_2\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$, $a = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$



L'eccentricità è sempre $\sqrt{2}$

quindi $e = \frac{c}{a} = \sqrt{2}$

$\Rightarrow c = a \cdot \sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \sqrt{2} = 1$

Le coordinate dei fuochi sono

$F_1\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $F_2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

8) Scrivi l'equazione dell'iperbole che ha come asintoti le rette di equazione $y = \pm \frac{\sqrt{5}}{2} x$ e i fuochi di coordinate $\left(\pm \frac{3}{5}, 0\right)$

Combinando le 3 relazioni

$$\frac{b}{a} = \frac{\sqrt{5}}{2}, \quad c = \frac{3}{5}, \quad c^2 = a^2 + b^2$$

si possono ricavare a, b e c:

$$c^2 = a^2 + \left(\frac{\sqrt{5}}{2}a\right)^2 = \left(\frac{3}{5}\right)^2, \quad a^2 + \frac{5}{4}a^2 = \frac{9}{25}$$

$$\frac{9}{4}a^2 = \frac{9}{25}, \quad a^2 = \frac{4}{25}, \quad a = \frac{2}{5}$$

$$b = \frac{\sqrt{5}}{2}a = \frac{\sqrt{5}}{2} \cdot \frac{2}{5} = \frac{1}{\sqrt{5}}, \quad b^2 = \frac{1}{5}$$

L'equazione è $\dfrac{x^2}{\frac{25}{4}} - \dfrac{y^2}{\frac{1}{5}} = 1$, $\dfrac{4}{25}x^2 - 5y^2 = 1$

9) Scrivi l'equazione dell'iperbole con il centro nell'origine che passa per i punti $P(1,0)$ e $Q(\sqrt{3},4)$

P deve essere un vertice, quindi

$a = 1$, inoltre $\dfrac{3}{a^2} - \dfrac{16}{b^2} = 1$, da cui:

$$\frac{16}{b^2} = 3 - 1 = 2, \quad b^2 = \frac{16}{2} = 8, \quad b = \sqrt{8}$$

L'equazione è $x^2 - \dfrac{y^2}{8} = 1$.

10) Scrivi le equazioni delle rette tangenti all'iperbole di equazione $\frac{x^2}{4} - 5y^2 = 5$ e passanti per il punto $P(2\sqrt{5}, 0)$

Il punto appartiene all'iperbole, infatti $\frac{(2\sqrt{5})^2}{4} - 5 \cdot 0 = \frac{\cancel{4} \cdot 5}{\cancel{4}} = 5$

Si possono usare le formule di sdoppiamento:

$$\frac{x \cdot 2\sqrt{5}}{4} - \cancel{5 \cdot y \cdot 0} = 5, \quad x = 2\sqrt{5}$$

(è una retta parallela all'asse y)

11) Scrivi l'equazione dell'iperbole di centro $C(1,-3)$, semiassi $a = 3$, $b = 2$ e asse focale parallelo all'asse x

Con il centro nell'origine l'equazione sarebbe:

$$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1,$$

traslando l'origine in $C(1,-3)$ si ottiene $\frac{(x-1)^2}{9} - \frac{(y+3)^2}{4} = 1$

12) Disegna il grafico della funzione omografica: $y = \frac{4-2x}{x-1}$

L'asintoto verticale ha equazione $x=1$, quello orizzontale $y=-2$

Per $x=0$ si ha $y=-4$ e $y(2)=0$