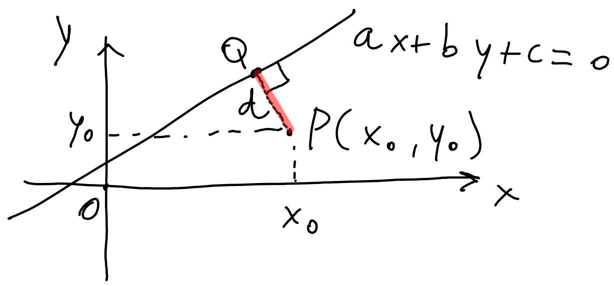
Distanza di un punto da una retta

Utilizzando le traslazioni è più facile risolvere vari problemi.

Per esempio si può ottenere più facilmente la formula per calcolare la distanza di un punto da una retta.

Vogliamo determinare la distanza di un punto $P(x_0, y_0)$ da una retta di equazione $ax + by + c = 0$.

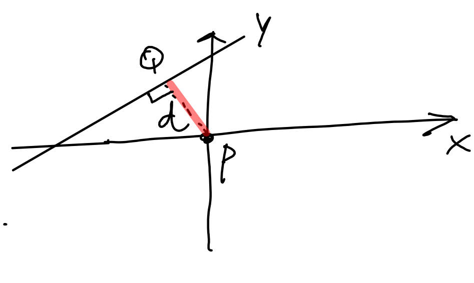


La distanza cercata è la lunghezza del segmento PQ.

Conviene, per semplificare i calcoli, traslare il punto P nell'origine O.

Questa traslazione ha equazioni: $\begin{cases} x' = x - x_0 \\ y' = y - y_0 \end{cases}$

Dopo la traslazione si ha la seguente disposizione:



La distanza d non cambia.

Ora P ha coordinate $P(0,0)$.

La retta traslata ha equazione:

$$a(x+x_0)+b(y+y_0)+c=0 \quad \text{o anche}$$

$$ax+by+\overbrace{ax_0+by_0+c}^{e}=0$$

La pendenza di questa retta è $m=-\frac{a}{b}$

La perpendicolare passante per P ha equazione $y=\frac{b}{a}x$.

Le coordinate di Q si trovano risolvendo il sistema:

$$\begin{cases} ax+by+e=0 \\ y=\frac{b}{a}x \end{cases}$$

Sostituendo:

$$\begin{cases} ax+b\cdot\frac{b}{a}x+e=0 \\ y=\frac{b}{a}x \end{cases} \quad \begin{cases} (a^2+b^2)x+ae=0 \\ y=\frac{b}{a}x \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_Q=-\frac{ae}{a^2+b^2} \\ y_Q=\frac{b}{\cancel{a}}\left(-\frac{\cancel{a}e}{a^2+b^2}\right)=-\frac{be}{a^2+b^2} \end{cases}$$

La distanza cercata è allora

$$d = \overline{PQ} = \sqrt{x_Q^2 + y_Q^2} = \sqrt{\left(-\frac{ae}{a^2+b^2}\right)^2 + \left(-\frac{be}{a^2+b^2}\right)^2} =$$

$$= \sqrt{\frac{a^2e^2 + b^2e^2}{(a^2+b^2)^2}} = \sqrt{\frac{e^2}{a^2+b^2}} = \frac{|e|}{\sqrt{a^2+b^2}} =$$

$$= \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

Si ottiene così la formula per la distanza di un punto da una retta:

$$d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

Esempio

Calcola la distanza della retta di equazione $y = 2x - 1$ dal punto $P(4, 3)$.

Si scrive l'equazione in forma cartesiana (implicita): $2x - y - 1 = 0$.
Si calcola la distanza con la formula sostituendo i valori:

$$a = 2, \; b = -1, \; c = -1, \; x_0 = 4, \; y_0 = 3$$

$$d = \frac{|2 \cdot 4 - 1 \cdot 3 - 1|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \frac{4}{\sqrt{5}} = \frac{4}{5}\sqrt{5} \simeq 1{,}79$$